

CTB3330

Constructiemechanica 4

**Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"**



LET OP! EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE VORMING



April 2016
April 2014
April 2013

April 2012
April 2011
Januari 2010

Vul dit schema in om een overzicht te hebben van welke onderwerpen van het vak al goed gaan en welke je nog moet oefenen

[illegible]

Tentamen CT3109

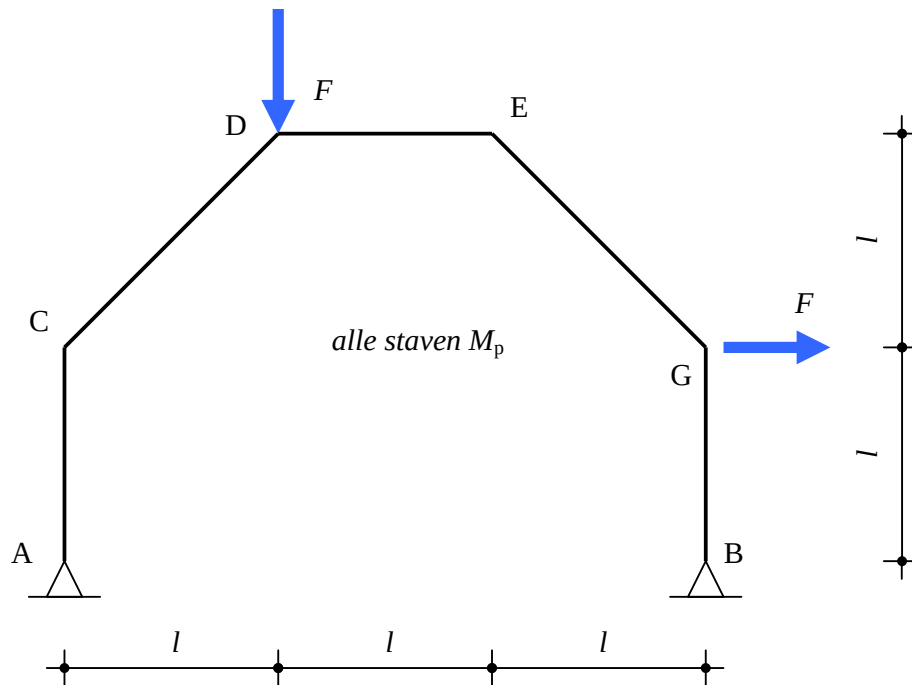
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

18 jan 2010,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons en UMTS tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan
- Maak zonodig gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Plasticiteit en bezwijktheorie**(ca 45 min)**

In de onderstaande figuur is een geknikt spant weergegeven die in A en B scharnierend is opgelegd. In D en G wordt het spant belast met de aangegeven krachten F .

**Vragen:**

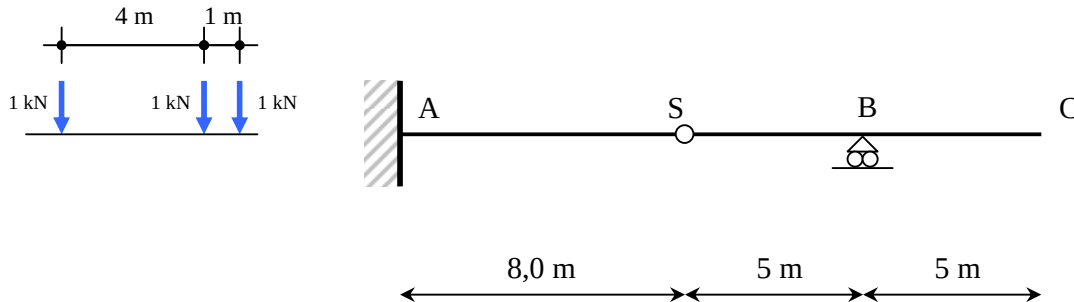
- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en teken deze met kleine schetsjes.
- Van alle mechanismen die kunnen optreden mag u **maximaal 3 mechanismen** echt onderzoeken. Geef **oordeelkundig** aan welke drie mechanismen in aanmerking komen als maatgevend bezwijkmechanisme en onderzoek deze. Bepaal zo de bezwijkbelasting F_p .

Opmerking : Oordeelkundig houdt hier in dat u gemotiveerd kunt aangeven waarom een bepaald mechanisme een lagere bezwijklast zal hebben in vergelijking tot de anderen.

- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 45 min)**

Een laststelsel bestaande uit drie eenheidslasten rijdt over de onderstaande scharnierligger. De lasten hebben een vaste afstand tot elkaar.

**Vragen :**

Construeer voor deze constructie, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De verticale oplegreactie in A
- Het inklemmingsmoment in A
- De dwarskracht links van het scharnier
- De dwarskracht rechts van het scharnier
- De zakking van het scharnier S
- De oplegreactie in B

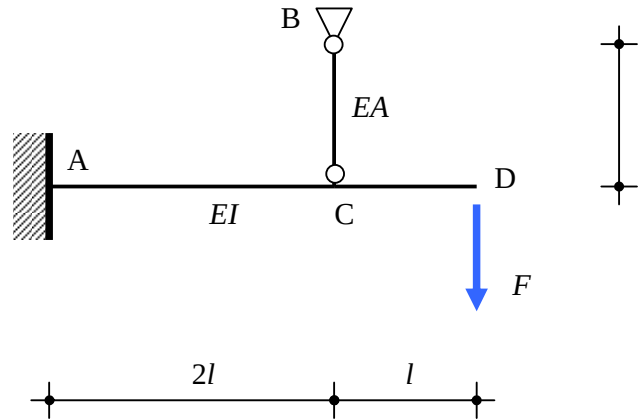
Wat is de meest ongunstige positie voor het laststelsel en bepaal de grootte van de gevraagde grootheid in deze situatie voor :

- Het inklemmingsmoment in A
- De oplegreactie in B

Opmerking : Construeren houdt in dit verband in dat de vorm en de invloedsfactoren van de invloedslijn volledig zijn bepaald.

OPGAVE 3 : Arbeid en Energiemethoden**(ca 45 min)**

Een enkelzijdig ingeklemde buigligger ACD met buigstijfheid EI is opgehangen aan een pendelstaaf BC met axiale stijfheid EA .



Gegeven : $l = 2 \text{ m}$; $EI = 10000 \text{ kNm}^2$; $EA = 1000 \text{ kN}$; $F = 62 \text{ kN}$

Vragen:

- a) Bepaal van deze constructie met behulp van een arbeid- of energiemethode naar keuze de momentenlijn en teken deze inclusief de vervormingstekens en schrijf de extreme waarden erbij.

Merk op : Hoewel het erg verleidelijk is om dit op te lossen met de krachtenmethode wordt hier expliciet getoetst op een leerdoel m.b.t. arbeid en energie. U mag uiteraard uw uitkomst wel controleren met de krachtenmethode maar naar deze methode wordt niet gevraagd!

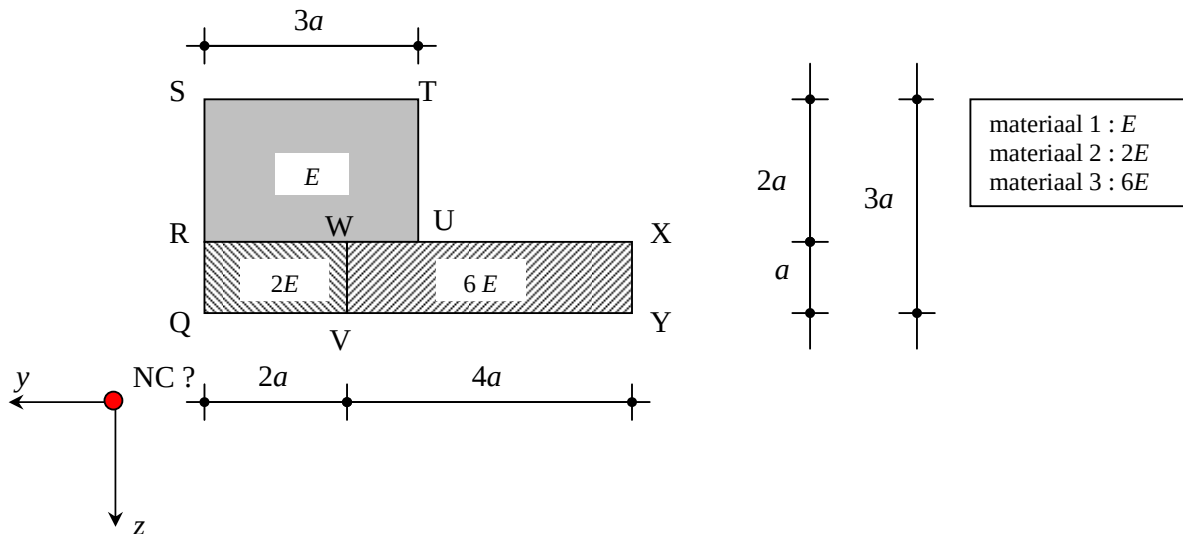
- b) Bepaal de normaalkracht in de pendelstaaf.
- c) Als de pendelstaaf een rekloze staaf is, hoe groot is dan de normaalkracht in deze pendel ?

Merk op : Hier wordt niet expliciet aangegeven welke methode U dient te gebruiken, iedere methode naar eigen inzicht, mits toepasbaar, voldoet dus.

OPGAVE 4

(ca 45 min)

Van een op buiging belaste staaf in een constructie is gegeven dat de inhomogene dwarsdoorsnede gemaakt is van een composiet bestaande uit drie verschillende materialen. De delen zijn in de figuur aangegeven met hun elasticiteitsmoduli. De samengestelde doorsnede mag worden beschouwd als een starre doorsnede.



Gegevens : $E = 15000 \text{ N/mm}^2$; $a = 50 \text{ mm}$;

$$N = 0 \text{ kN};$$

$$V_y = 10 \text{ kN}; \quad V_z = 0 \text{ kN}$$

$$M_y = 70,0 \text{ kNm}; \quad M_z = 0 \text{ kNm}$$

Vragen:

- Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC.
- Welke relatie legt de constitutieve relatie van de doorsnede?
- De constitutieve matrix voor deze doorsnede is hieronder weergegeven. Laat zien dat de waarde van het element in de 3^e kolom van de 2^e rij correct is.

$$\frac{Ea^2}{102} \begin{bmatrix} 3468 & 0 & 0 \\ 0 & 9169a^2 & -1566a^2 \\ 0 & -1566a^2 & 1576a^2 \end{bmatrix}$$

- Teken in een figuur van de dwarsdoorsnede de *neutrale lijn*, het *belastingvlak* m en het *krommingsvlak* k .
- Teken in een 2^e figuur de normaalspanningsverdeling voor het deel RSTU (materiaal 1) en het deel VWXY (materiaal 3) en zet deze spanningen uit t.o.v. een lijn die loodrecht staat op de neutrale lijn.
- Bepaal de schuifstroom (in N/mm) in het horizontale vlak tussen R en U
- Leg uit welke vorm de kern van deze doorsnede heeft en hoe deze kan worden bepaald. (**merk op:** ga niet rekenen!)

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en : } \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of : } s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \varepsilon$$

$$M = EI \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

Hulpmiddelen bij het integreren van producten van functies e.d. :

m				
M				
	$\frac{1}{3}jkl$	$\frac{1}{6}jkl$	$\frac{1}{6}(j_1 + 2j_2)kl$	$\frac{1}{2}jkl$
	$\frac{1}{6}jkl$	$\frac{1}{3}jkl$	$\frac{1}{6}(2j_1 + j_2)kl$	$\frac{1}{2}jkl$
	$\frac{1}{6}j(k_1 + 2k_2)l$	$\frac{1}{6}j(2k_1 + k_2)l$	$\frac{1}{6}\{j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)\}l$	$\frac{1}{2}j(k_1 + k_2)l$
	$\frac{1}{2}jkl$	$\frac{1}{2}jkl$	$\frac{1}{2}(j_1 + j_2)kl$	jkl
	$\frac{1}{6}jk(l+a)$	$\frac{1}{6}jk(l+b)$	$\frac{1}{6}\{j_1(l+b) + j_2(l+a)\}k$	$\frac{1}{2}jkl$
	$\frac{5}{12}jkl$	$\frac{1}{4}jkl$	$\frac{1}{12}(3j_1 + 5j_2)kl$	$\frac{2}{3}jkl$
	$\frac{1}{4}jkl$	$\frac{5}{12}jkl$	$\frac{1}{12}(5j_1 + 3j_2)kl$	$\frac{2}{3}jkl$
	$\frac{1}{4}jkl$	$\frac{1}{12}jkl$	$\frac{1}{12}(j_1 + 3j_2)kl$	$\frac{1}{3}jkl$
	$\frac{1}{12}jkl$	$\frac{1}{4}jkl$	$\frac{1}{12}(3j_1 + j_2)kl$	$\frac{1}{3}jkl$
	$\frac{1}{3}jkl$	$\frac{1}{3}jkl$	$\frac{1}{3}(j_1 + j_2)kl$	$\frac{2}{3}jkl$

(1)		$\theta_2 = \frac{TL}{EI}; w_2 = \frac{TL^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}; w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{TL}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{TL}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{TL^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{TL}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{TL}{EI}; w_3 = 0$

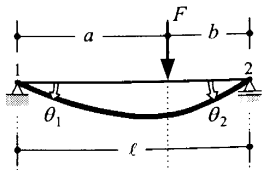
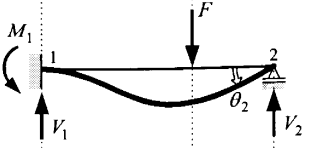
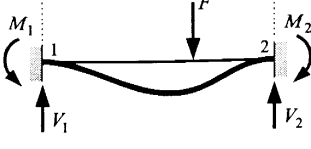
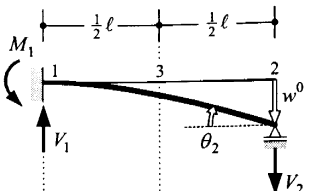
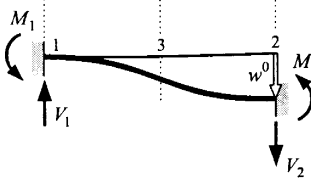
vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)		statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)	
(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T \ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{T \ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$	
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F \ell^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{F \ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F \ell; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$	
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q \ell^3}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{q \ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q \ell^2; V_1 = \frac{5}{8} q \ell; V_2 = \frac{3}{8} q \ell$	
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F \ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F \ell; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$	
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q \ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q \ell^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q \ell$	
(b)		$\theta_3 = \frac{1}{16} \frac{T \ell}{EI}; w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$	

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI .
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppell, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_1 en V_1 zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede 1 van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.

Enkele formules voor prismaïsche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppell, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{2\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{2\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Tentamen CT3109

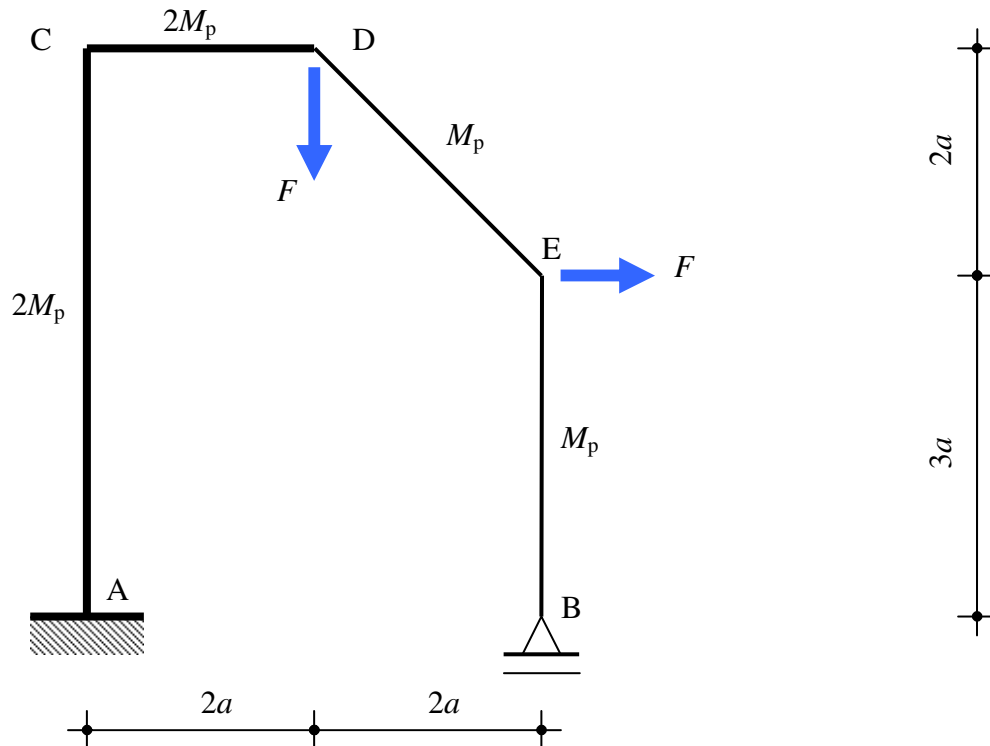
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

11 april 2011,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons en UMTS tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan
- Maak zonodig gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Plasticiteit en bezwijktheorie**(ca 45 min)**

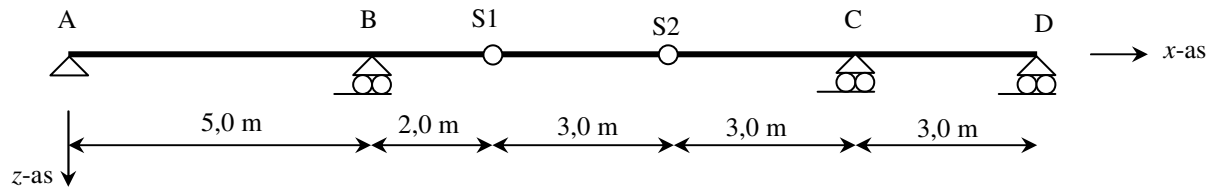
In de onderstaande figuur is een geknikt spant weergegeven dat in A volledig is ingeklemd en in B opgelegd is op een horizontale rol. Het spant wordt in D en E belast met de aangegeven krachten F . Het deel ACD is twee maal zo sterk als het deel BED.

**Vragen:**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en teken deze met kleine schetsjes.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p uitgedrukt in a en het volplastisch moment M_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 35 min)**

Hieronder is een statisch bepaalde constructie gegeven. De Gerber-ligger heeft twee scharnieren S1 en S2.



Figuur 1 : Statisch bepaalde constructie

Vragen:

- Leg uit hoe de invloedslijn voor een krachtsgrootte kan worden bepaald?
- Leg uit hoe de invloedslijn voor een verplaatsingsgrootte kan worden bepaald
- Construeer de invloedslijn voor het steunpuntsmoment in B.
- Construeer de invloedslijn voor het steunpuntsmoment in C.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct links van C.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht halverwege AB
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in C
- Schets de invloedslijn voor de zakking van scharnier S2.
- Waar moet de gelijkmatig verdeelde belasting q worden geplaatst opdat het steunpuntsmoment maximaal is en welk steunpunt is dan maatgevend ?

OPGAVE 3 : Arbeid en Energiemethoden**(ca 45 min)**

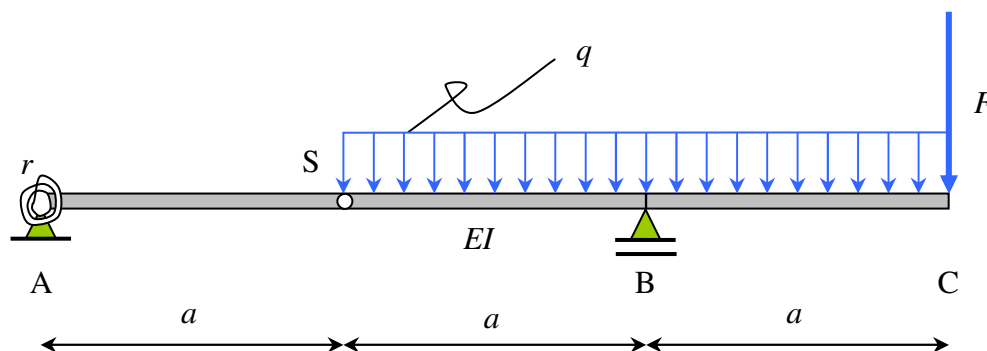
In de onderstaande figuur is een buigligger weergegeven die aan de linker zijde verend is ingeklemd en in B scharnierend is ondersteund. S is een in de ligger aangebracht scharnier. De ligger wordt over het deel SBC belast met een gelijkmatig verdeelde last q en in C met een puntlast F .

De veerstijfheid is met de onderstaande uitdrukking in een (dimensieloos) verhoudingsgetal uit te drukken t.o.v. de buigstijfheid en uitkraging a van de ligger:

$$\rho = \frac{r \cdot a}{EI} \Rightarrow r = \frac{\rho \cdot EI}{a}$$

Voor een rotatieveer kan de vormveranderingsenergie worden bepaald met de volgende uitdrukking:

$$E_v = \frac{M_{veer}^2}{2r}$$

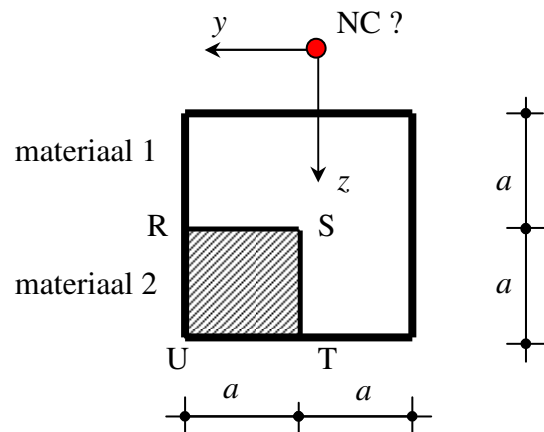
**Vragen:**

- Bepaal de momentenlijn voor deze constructie en teken deze inclusief de vervormingstekens en zet de waarden erbij.
- Bepaal de zakking van punt S met een arbeids- of energiemethode naar keuze en druk deze uit in de gegeven parameters waarbij U de veerstijfheid van de rotatieveer mag uitdrukken m.b.v. het verhoudingsgetal ρ .
- Geef de door U gevonden uitdrukking voor de vormveranderingsenergie t.g.v. de belasting en druk deze uit in de parameters F , q , a , ρ en EI .
- Als verder gegeven is : $EI = 10000 \text{ kNm}^2$; $\rho = 2$, $a = 4 \text{ m}$; $q = 4 \text{ kN/m}$ en $F = 10 \text{ kN}$, bepaal dan de gevonden zakking voor S in mm en het maximum moment in kNm.
- Bepaal de opgeslagen vormveranderingsenergie voor de situatie waarbij de veerstijfheid van de rotatieveer bijzonder klein is.

TIP : maak een schets van de vervormde constructie!

OPGAVE 4**(ca 45 min)**

Van een op buiging belaste staaf in een constructie is gegeven dat de niet symmetrische dwarsdoorsnede gemaakt is van twee materialen met een verschillende elasticiteitsmodulus. Beide materialen werken volledig samen. De afmetingen en de verdere gegevens zijn hieronder afgebeeld. De liggeras is de x -as en de oorsprong van het assenstelsel in de doorsnede wordt gekozen in het normaalkrachten-centrum. De doorsnede wordt belast in het x - z -vlak met een dwarskracht van 191 kN en een buigend moment van 1910 kNm.



Gegevens : $E_1 = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $E_2 = 1800 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $a = 300 \text{ mm}$

Vragen:

- Waarom wordt het assenstelsel in de doorsnede gekozen in het normaalkrachtencentrum?
- Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC.
- De constitutieve matrix voor deze doorsnede is hieronder weergegeven. Toon aan dat deze matrix correct is.

$$10^{12} \begin{bmatrix} 0,216 & 0 & 0 \\ 0 & 4320 & 1080 \\ 0 & 1080 & 4320 \end{bmatrix} \quad \text{eenheden N, mm}$$

- Bepaal de ligging van de *neutrale lijn*, het belastingvlak m en het krommingsvlak k en teken deze in een figuur van de dwarsdoorsnede
- Teken in een 2^e figuur de normaalspanningsverdeling, zet het normaalspanningsdiagram loodrecht uit op de neutrale lijn. Laat duidelijk zien in welk materiaal de aangegeven spanningen optreden, gebruik hiervoor zonodig kleur.
- Bepaal de kracht die per eenheid van liggerlengte moet worden overgedragen in de interface RST tussen materiaal 1 en 2.
- Bepaal het linker kernpunt van de doorsnede en teken deze in de figuur van de doorsnede.
- In welke vlak heeft deze doorsnede de grootste buigstijfheid en hoe groot is deze?

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

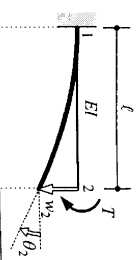
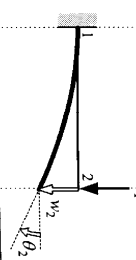
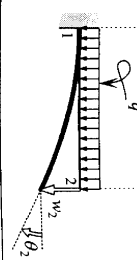
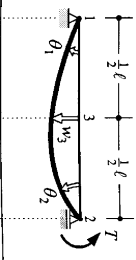
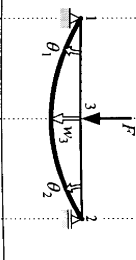
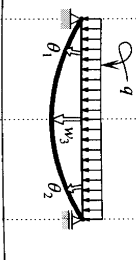
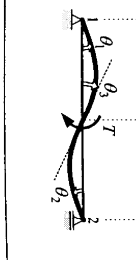
Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

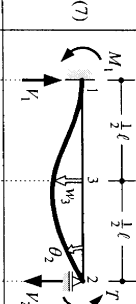
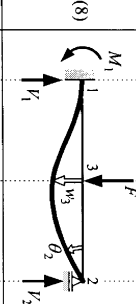
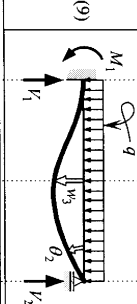
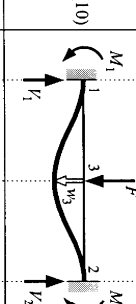
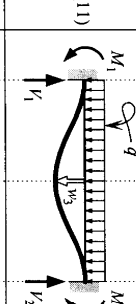
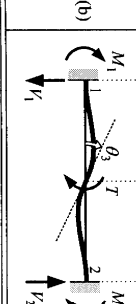
Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

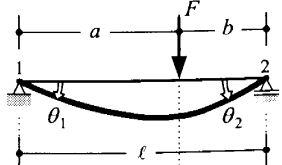
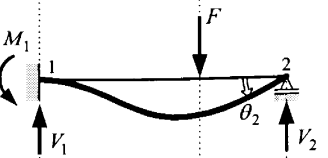
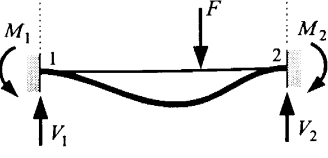
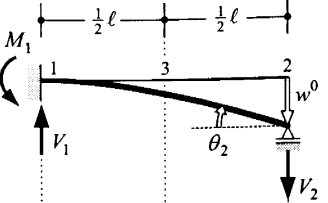
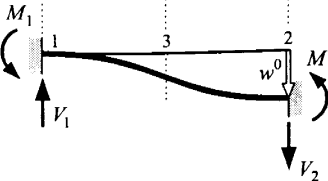
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; V_1 = \frac{5}{8} q\ell; V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

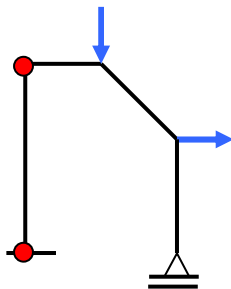
drie bij-de handjes

zettingen

ANSWERS

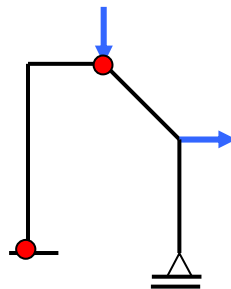
Problem 1 : Plasticity

- a) The given structure is statically indeterminate with a degree of one. To obtain a mechanism, two additional hinges are required. Hinges can occur at four positions. Thus, six mechanisms have to be investigated. However, moments can not occur at E due to the loading and support conditions at B thus only three mechanisms are left to be considered. Possible mechanisms are shown below. Each mechanism is shown in detail on the following pages.



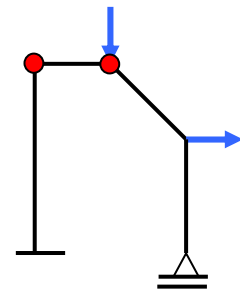
1

$$F_p = \frac{4M_p}{5a}$$



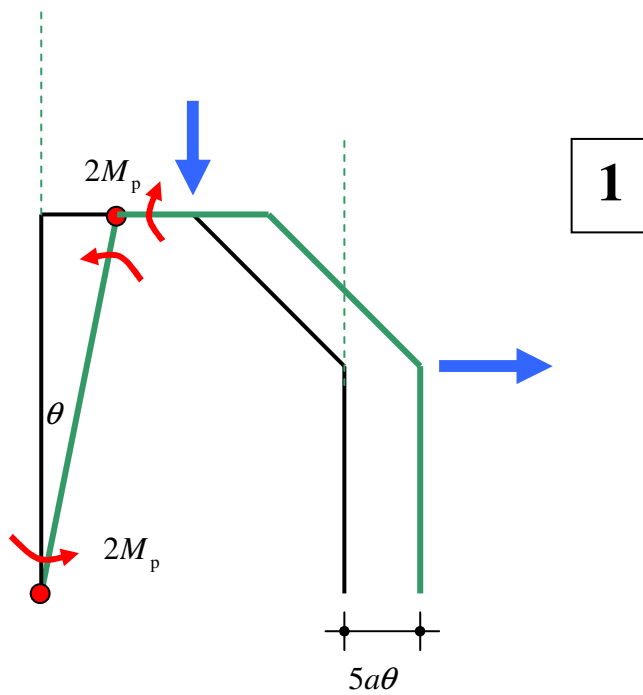
2

$$F_p = \frac{4M_p}{9a}$$



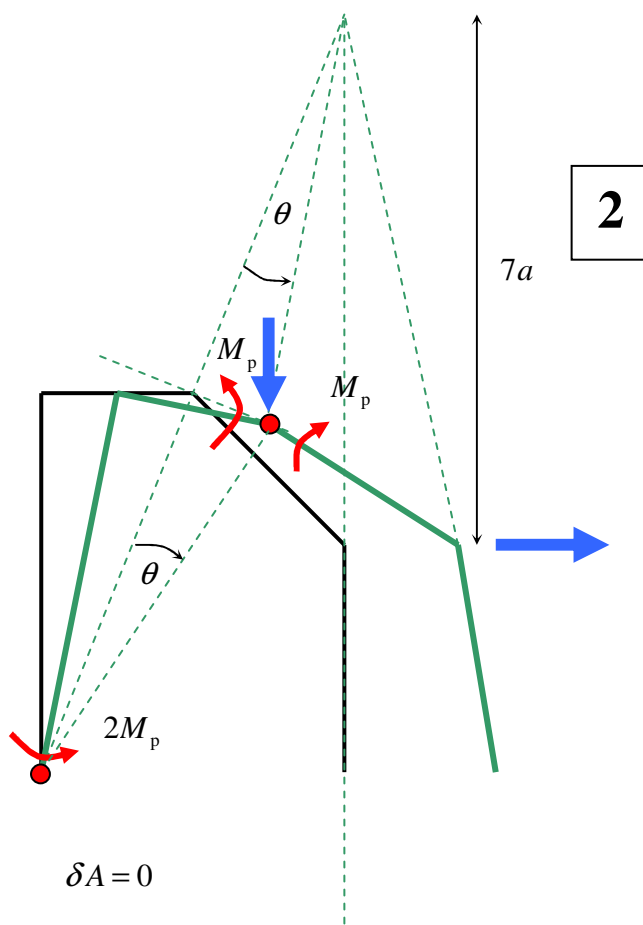
3

$$F_p = \frac{M_p}{a}$$



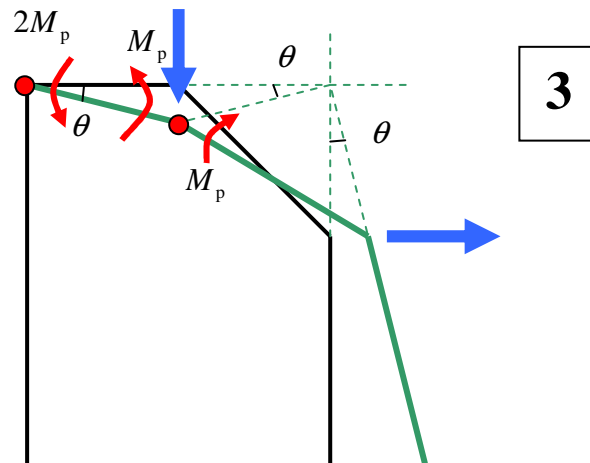
$$\delta A = 0$$

$$-2M_p \times \delta\theta - 2M_p \times \delta\theta - 2M_p \times 0(!) + F_p \times 5a\delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{4M_p}{5a}$$



$$\delta A = 0$$

$$-2M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta + F_p \times 2a\delta\theta + F_p \times 7a\delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{4M_p}{9a}$$

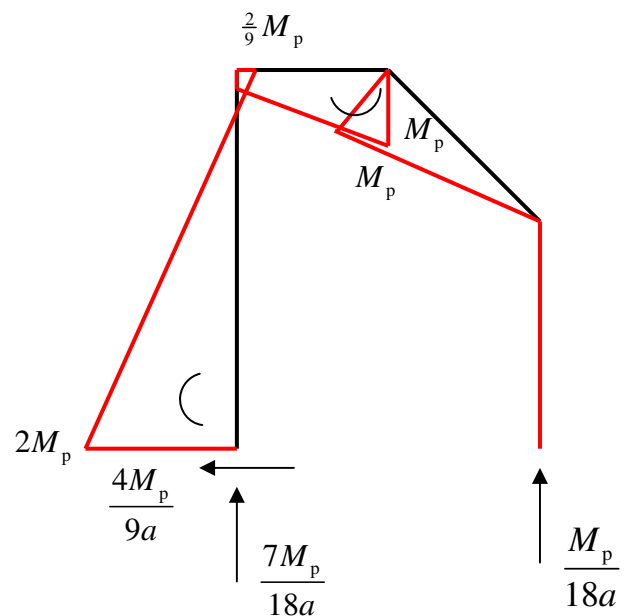


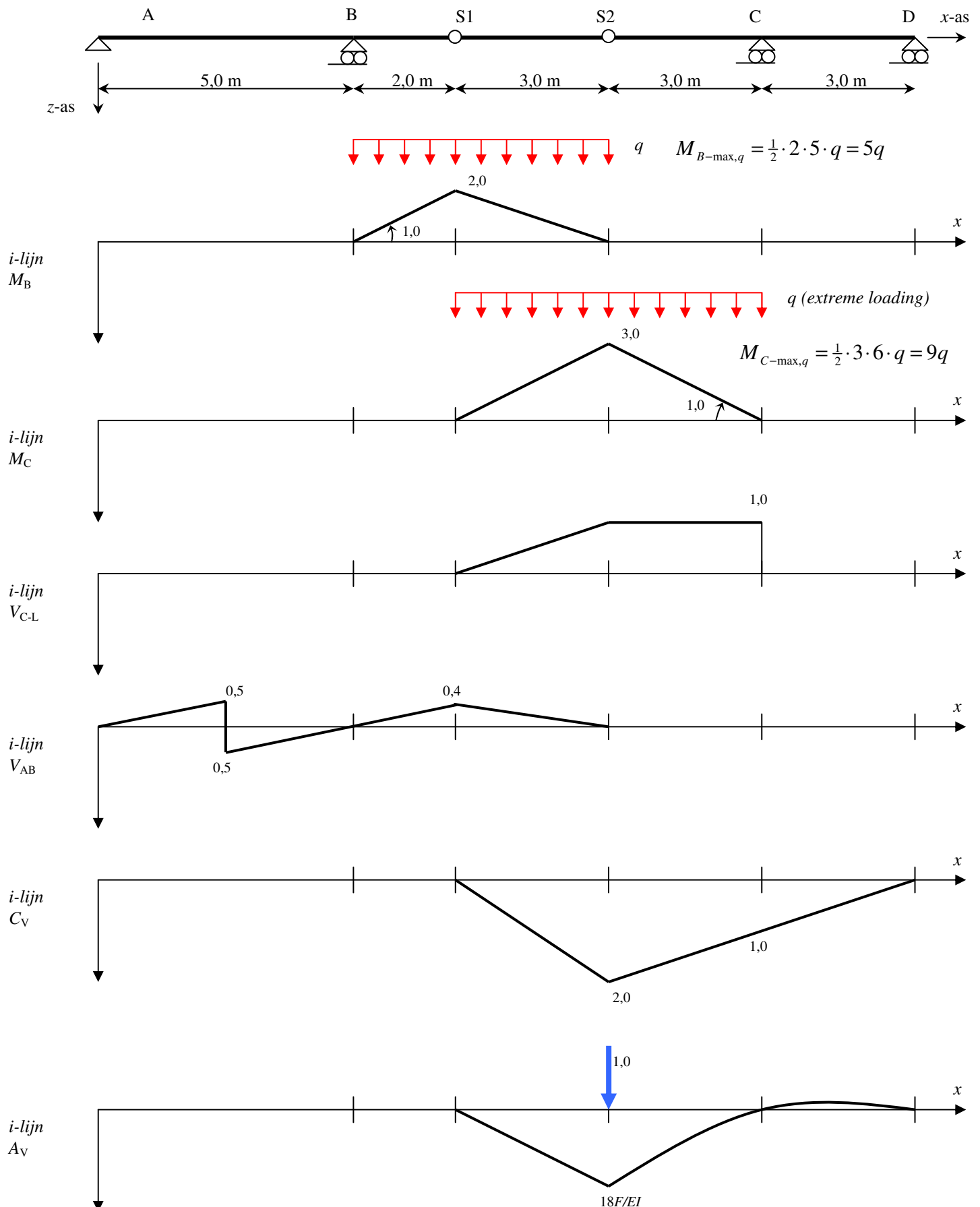
$$\delta A = 0$$

$$-2M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta + F_p \times 2a\delta\theta + F_p \times 2a\delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{M_p}{a}$$

b) The ultimate load is the lowest load found: $F_p = \frac{4M_p}{9a} = 0,444 \frac{M_p}{a}$

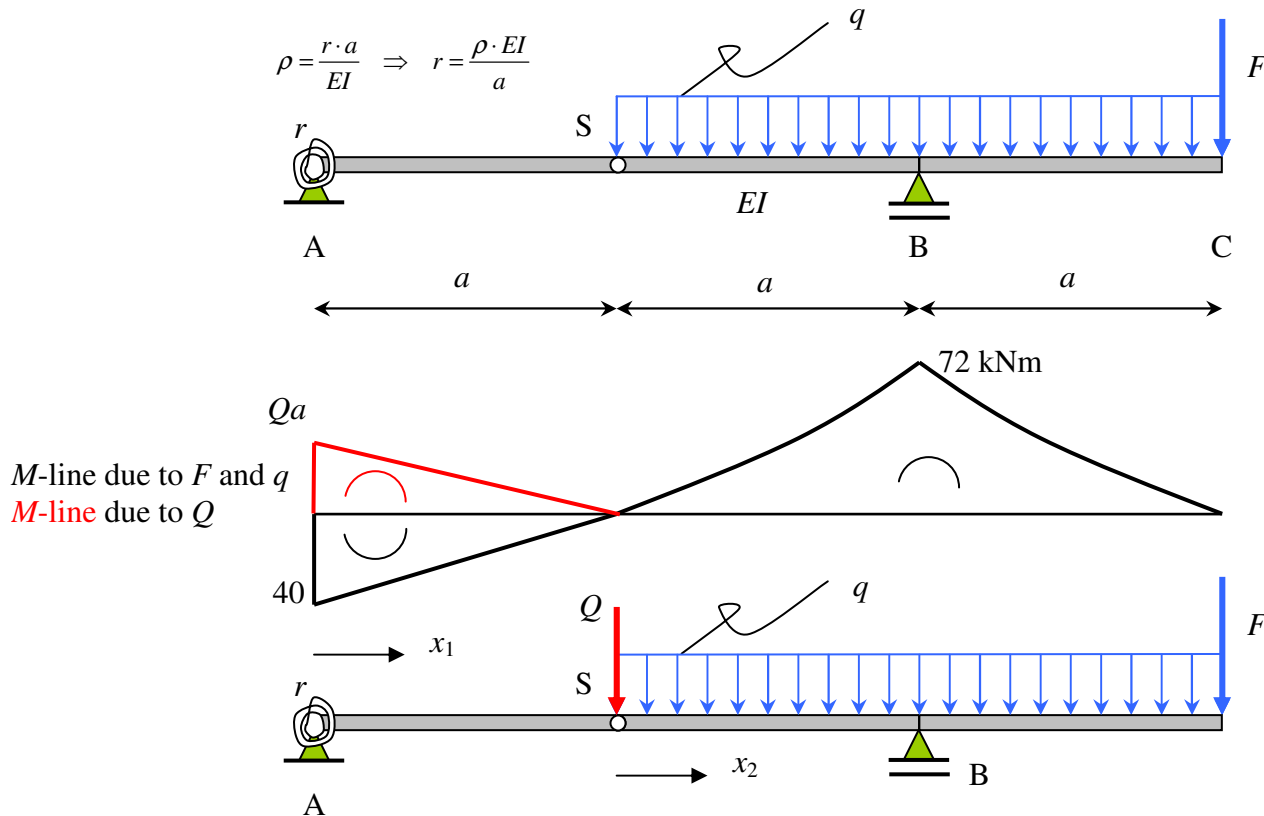
c) To find the correct moment distribution start with the support reactions. The moment distribution shows a statically admissible distribution in which at no cross section the bending moments exceeds the ultimate plastic capacity of the cross section. (**uniqueness theorem**)



Problem 2 : Influence lines

Problem 3 : Work and Energy Methods

- a) The moment distribution can be found based on equilibrium. The distributed load q is in fact balanced thus only the concentrated load is contributing to the moment in the spring and the member AS. (first years knowledge !!)



- b) To find the displacement at S a dummy load Q is required. In red the moment distribution due to the dummy load is presented. Since the moment distribution over SB and BC are exhibiting mirror symmetry, only part SB has to be examined. Using a local coordinate for part AS and SB denoted with x_1 and x_2 , the deformation energy can easily be expressed in terms of F , q and Q :

$$E_v = \frac{M_v^2}{2r} + \int_{x_1=0}^{x_1=a} \frac{((F-Q)(a-x_1))^2}{2EI} dx_1 + 2 \int_{x_2=0}^{x_2=a} \frac{\left(Fx_2 + \frac{1}{2}qx_2^2\right)^2}{2EI} dx_2 \quad \text{met:}$$

$$M_v = (F-Q) \cdot a$$

Using Castigliano's theorem solves the deflection at S: (note: 2nd integral is irrelevant)

$$w_s = \frac{\partial E_v}{\partial Q} = -\frac{(F-Q)a^3}{\rho EI} - \frac{(F-Q)a^3}{3EI}$$

$$\text{The dummy load is zero which results in: } w_s = -\frac{Fa^3(3+\rho)}{3\rho EI} = -\frac{Fa^3}{\rho EI} - \frac{Fa^3}{3EI}$$

Hinge S will move upwards due to the load F .

- c) Using the given values results in a displacement of 0,0533 m upwards. This displacement is independent of the distributed load q !

- d) The total deformation energy stored due to the loading is: (note : 2nd integral is essential)

$$E_v = \frac{M_v^2}{2r} + \int_{x_1=0}^{x_1=a} \frac{(F(a-x_1))^2}{2EI} dx_1 + 2 \int_{x_2=0}^{x_2=a} \frac{\left(Fx_2 + \frac{1}{2}qx_2^2\right)^2}{2EI} dx_2$$

$$E_v = \frac{a^3 (10F^2(1+\rho) + qa\rho(5F + qa\rho))}{20\rho EI}$$

- e) If the spring stiffness becomes very small, point A turns into a hinge. A mechanism will occur. The load can move infinitely and thus produce infinite work. The bending deformation will be small compared to the deformation energy stored in the spring. So practically all deformation energy has to be taken by the spring(!) which results in hardly any deformation energy (and curvature) in the elements loaded in bending. The bars will remain straight:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} E_v = F \cdot w = \frac{(F \cdot a)^2}{2r} = \infty$$

Problem 4 : Non-symmetrical cross sections

- a) See the lecture notes.
 b) The axial stiffness of the cross section can be found with:

$$EA = 2a \times 2a \times E_1 - a \times a \times E_1 + a \times a \times E_2 = 216 \times 10^9$$

The origin of the coordinate system used is located at the NC. The vertical position of the NC with respect to the upper side of the cross section is:

$$\Delta z_{NC} = 400 \text{ mm}$$

The horizontal position with respect to the left side of the cross section is:

$$\Delta y_{NC} = 200 \text{ mm}$$

- c) The *cross sectional constitutive relation* relates the sectional forces to the deformations of the cross section. The bending stiffnesses can be found using the strategy outlined in the lecture notes. This example is very basic so only answers are presented here:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \text{ cross sectional constitutive relation [N, mm]}$$

$$K = 10^{12} \begin{bmatrix} 0,216 & 0 & 0 \\ 0 & 4320 & 1080 \\ 0 & 1080 & 4320 \end{bmatrix} \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1910 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

- d) Since this structure is loaded in bending only, the strain ε at the NC must be zero. The curvatures can be found with the constitutive relation:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = 0$$

$$\kappa_y = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} (EI_{zz} \times M_y - EI_{yz} \times M_z) = -0,1179 \times 10^{-6}$$

$$\kappa_z = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} (-EI_{yz} \times M_y + EI_{yy} \times M_z) = 0,4716 \times 10^{-6}$$

The direction of the *plane of loading* and the *plane of curvature* can be obtained with:

$$\tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y} \Rightarrow \alpha_m = 90^\circ; \quad \tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \Rightarrow \alpha_k = -76^\circ$$

The stresses for each point of the cross section can be computed with:

$$\sigma(y, z) = E \times (\varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z) \text{ N/mm}^2$$

The neutral axis *n.a.* can also be found with this latter expression by:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0 \Leftrightarrow \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0 \Leftrightarrow y - 4z = 0$$

- e) The stress distribution can be visualized with a few points. Only the four values marked in **bold** in the table on the next page were essential for the graphs.

Tabel : Stress in the specified points

Material	point	y [mm]	z [mm]	E [N/mm ²]	Stress [N/mm ²]
1	R	200	-100	200000	-14,1
	S	-100	-100	200000	-7,1
	T	-100	200	200000	21,2
	V	-400	200	200000	28,3
	W	-400	-400	200000	-28,3
	X	200	-400	200000	-42,4
2	R	200	-100	1800000	-127,3
	S	-100	-100	1800000	-63,7
	T	-100	200	1800000	191,0
	U	200	200	1800000	127,3

The neutral axis goes through the NC since the normal force N is zero. The red stress distribution represents the stresses in material 1 and the blue one represents material 2.

The moment M and thus the load F acts in the $x-m$ plane. The curvature κ acts in the $x-k$ plane.

- f) The longitudinal force per unit length of beam in the interface between material 1 and 2 can be obtained with:

Material 2 (RSTU) is taken as the sliding element with cross sectional area (a):

$$s_x = -\frac{R_M^{(a)}}{M} \times V = -\frac{\frac{1}{4}(\sigma_R + \sigma_S + \sigma_T + \sigma_U) \times a^2}{M_z} \times V_z$$

$$s_x = -\frac{\frac{1}{4}(127,3) \times 300 \times 300}{1910 \times 10^6} \times 191 \times 10^3 = 286 \text{ N/mm}$$

- g) The outer left kern point can be found by taking a neutral axis along VW. The location of the kernel point can be found with:

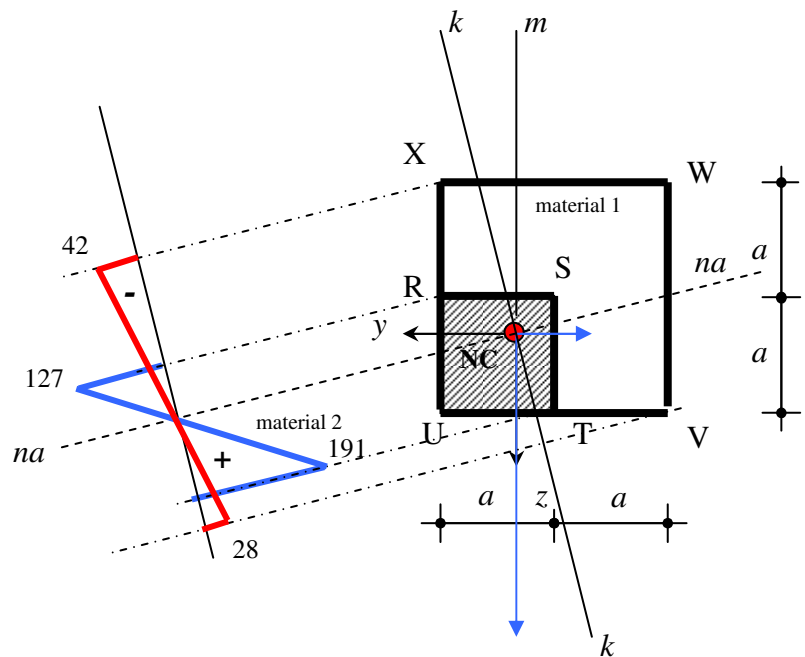
$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/(-400) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 12,5 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

- h) The principle direction of this cross section is at an angle of 45 degrees. For the principle coordinate system this cross section has one axis of symmetry. The maximum stiffness of this section then becomes:

$$EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

$$EI_1 = 5400 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2; \quad EI_2 = 3240 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Maximum bending stiffness is therefore $5400 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$.



Tentamen CT3109

CONSTRUCTIEMECHANICA 4

16 april 2012,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

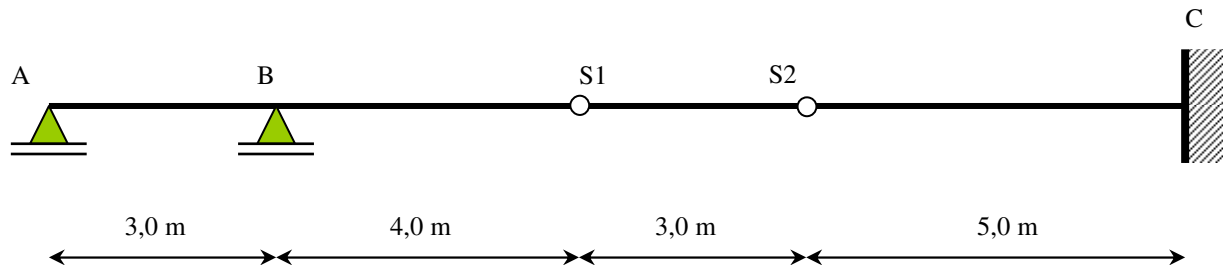
OPGAVE 1 : Theorievragen**(ca 30 min)**

Beantwoord de onderstaande vragen kort en bondig. Ondersteun het antwoord zonodig met een duidelijke schets.

- a) Leg uit hoe de invloedslijn voor de hoekverdraaiing kan worden bepaald en laat duidelijk zien in uw antwoord welke stappen vanuit de theorie nodig zijn om tot uw aanpak te komen.
- b) Geef aan hoe met behulp van arbeid en energie de formule van Rayleigh kan worden gevonden. Onderbouw uw antwoord zonodig met schetsjes.
- c) Van welke vooronderstelling wordt uitgegaan bij het toepassen van de bezwijkanalyse?
- d) Geef aan uit welke onderdelen de bovengrensbenadering van Prager voor het vinden van de bezwijkbelasting bestaat. Maak daarbij ook duidelijk waar de naam bovengrens vandaan komt.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 30 min)**

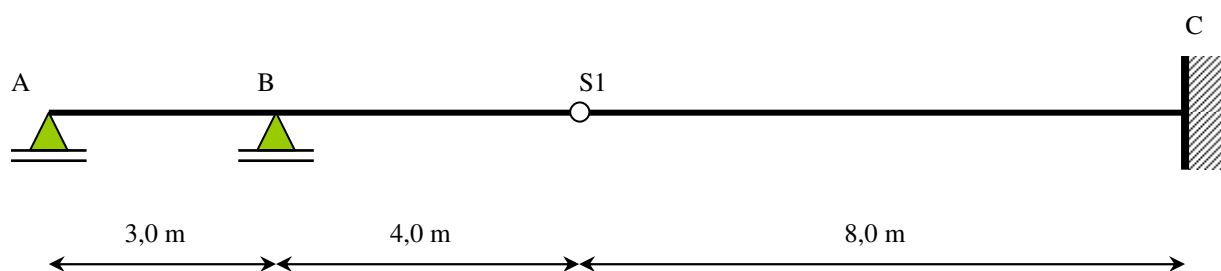
Deze opgave bestaat uit twee delen. Hieronder is een statisch bepaalde constructie gegeven. De ligger is in C volledig ingeklemd en heeft twee scharnieren S1 en S2.

**Vragen deel 1:**

- Construeer de invloedslijn voor het inkeermomentsmoment in C
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van B
- Construeer de invloedslijn voor de hoekverdraaiing in B
- Construeer de invloedslijn voor de zetting van scharnier S2

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

Door het verwijderen van scharnier S2 ontstaat een statisch onbepaalde constructie zoals hieronder is weergegeven.

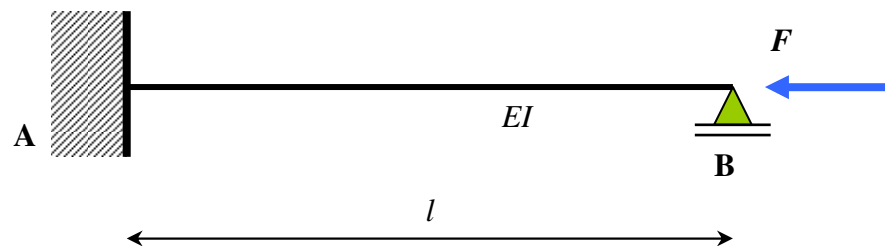
**Vragen deel 2:**

- Schets de invloedslijn voor het inkeermomentsmoment in C
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van B

OPGAVE 3 : Arbeid en Energie**(ca 30 min)**

Een op druk belaste staaf knikt bij een bepaalde kracht F . Voor het bepalen van de knikkracht wordt voorgesteld de methode van Rayleigh toe te passen. Een passend verplaatsingsveld wordt aangenomen. Om de kniklast zo goed mogelijk te benaderen wordt voorgesteld om een verplaatsingsveld aan te nemen dat aan alle randvoorwaarden voldoet.

$$w(x) = \frac{3}{2}al^2x^2 - \frac{5}{2}alx^3 + ax^4$$



Opmerking : Maak gebruik van het meegeleverde formuleblad.

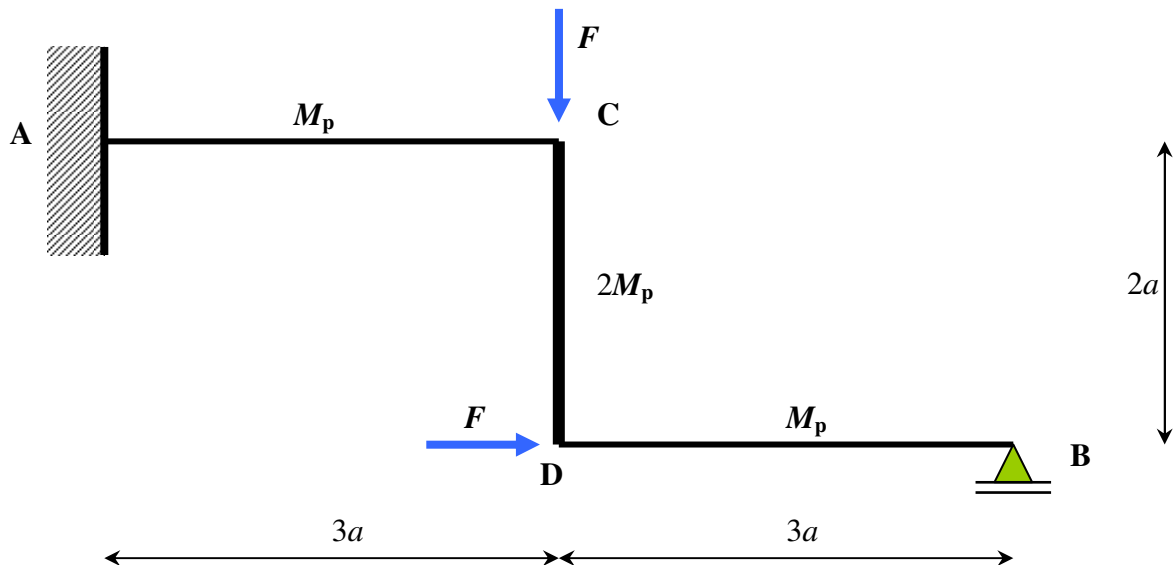
Vragen:

- Welke randvoorwaarde is extra gebruikt bij dit verplaatsingsveld?
- Laat zien dat het gegeven verplaatsingsveld inderdaad voldoet aan uw randvoorwaarden.
- Welk verplaatsingsveld zou u als polynoom voorstellen als alleen aan de kinematische voorwaarden moet worden voldaan?
- Bepaal de kniklast op basis van het gegeven verplaatsingsveld m.b.v. de methode van Rayleigh. Gebruik zonodig de formules op het formuleblad.
- Vergelijk deze uitkomst met de exacte uitkomst volgens Euler.
- Is het voldoen aan alle randvoorwaarden noodzakelijk en/of leidt dit ook tot een betere benadering van de kniklast dan wanneer u alleen voldoet aan de kinematische randvoorwaarden?

Noot : Beargumenteer uw antwoord op basis van de theorie en ga dus niet rekenen!

OPGAVE 4 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 45 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. Het raamwerk is in A ingeklemd en in B opgelegd op een horizontale rol. Het raamwerk wordt in D horizontaal en in C verticaal belast met een puntlast F . Staaf CD heeft een volplastisch moment $2M_p$, de overige staven hebben een volplastisch moment M_p .

**Vragen :**

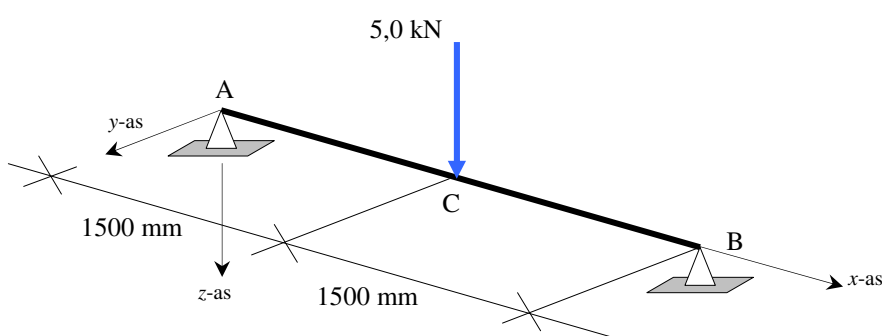
- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 5 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 45 min)**

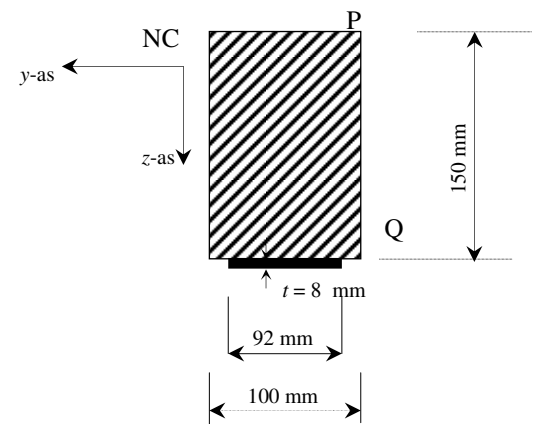
Een in A en B opgelegde balk heeft een inhomogene doorsnede. Het betreft een houten balk die versterkt is met een stalen strip aan de onderzijde. De ligger wordt in C belast met de in figuur (a) aangegeven puntlast. De doorsnede met een totale hoogte van 158 mm en een totale breedte van 100 mm is in figuur (b) weergegeven. Van de gebruikte materialen is gegeven:

- hout $E = 10 \text{ GPa}$
- staal $E = 210 \text{ GPa}$

De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. Voor de doorsnede berekeningen wordt een y-z-assenstelsel aangehouden door het NC.



(a) Constructie met belasting



(b) Doorsnede

Vragen :

- a) Leg uit wat de definitie is van het NC en bepaal de ligging ervan.
- b) Toon aan dat voor de weergegeven doorsnede t.p.v. C ongeveer geldt :

$$EI_{zz} = 7,57 \times 10^2 \text{ kNm}^2$$

- c) Bepaal t.p.v. de middendoorsnede de rekverdeling en teken deze.
- d) Bepaal t.p.v. de middendoorsnede de normaalspanningsverdeling en teken deze.
- e) Bereken de schuifkracht per eenheid van lengte in de interface tussen hout en staal.
- f) Bepaal de zakking van punt C.
- g) Bepaal het bovenste kernpunt van deze doorsnede.

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:

$$w = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^4$$

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = 4c_1^2 l + 12c_1 c_2 l^2 + 12c_2^2 l^3 + 16c_1 l^3 + 36c_2 l^4 + \frac{144}{5} l^5$$

$$\int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{4}{3} c_1^2 l^3 + 3c_1 c_2 l^4 + \frac{9}{5} c_2^2 l^5 + \frac{16}{5} c_1 l^5 + 4c_2 l^6 + \frac{16}{7} l^7$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

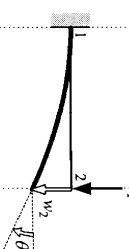
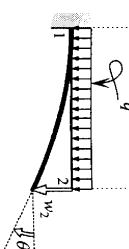
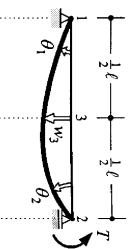
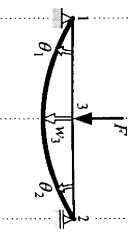
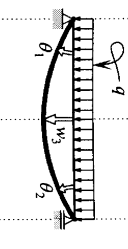
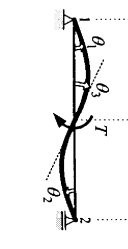
Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

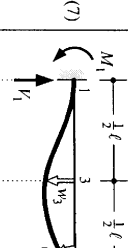
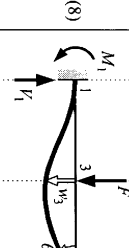
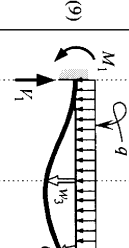
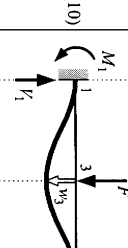
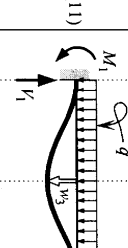
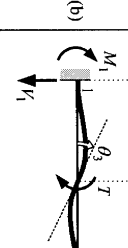
Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_3 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_3 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

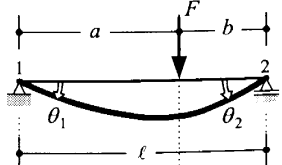
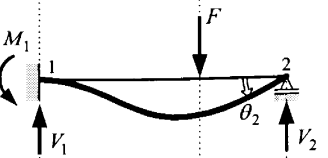
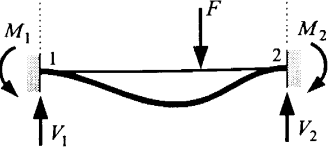
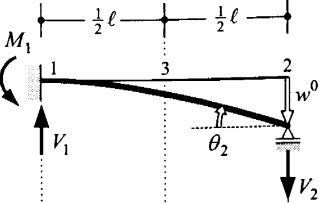
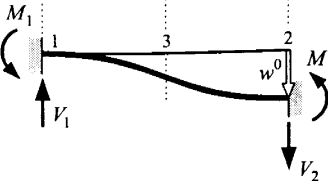
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

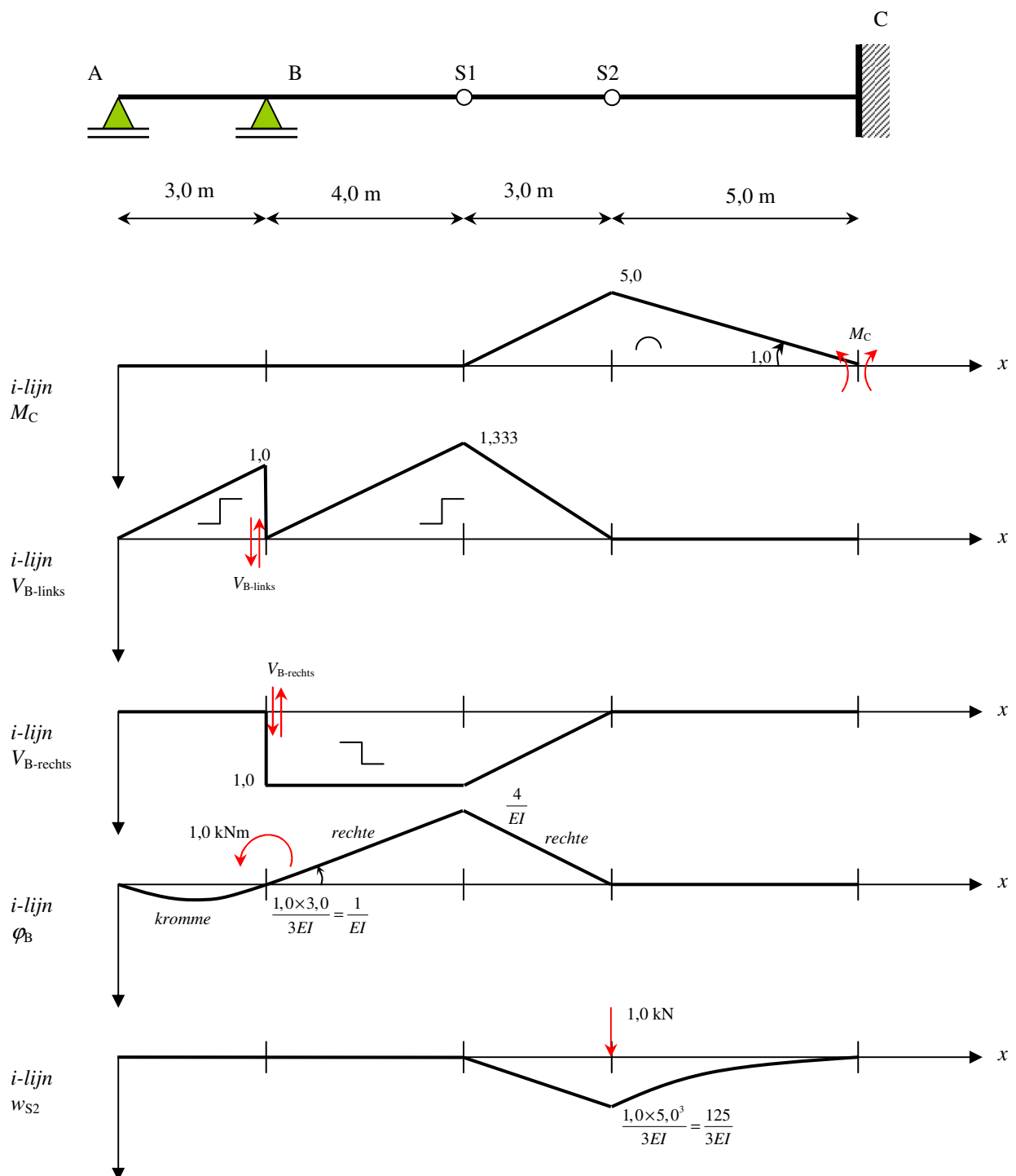
zettingen

ANTWOORDEN

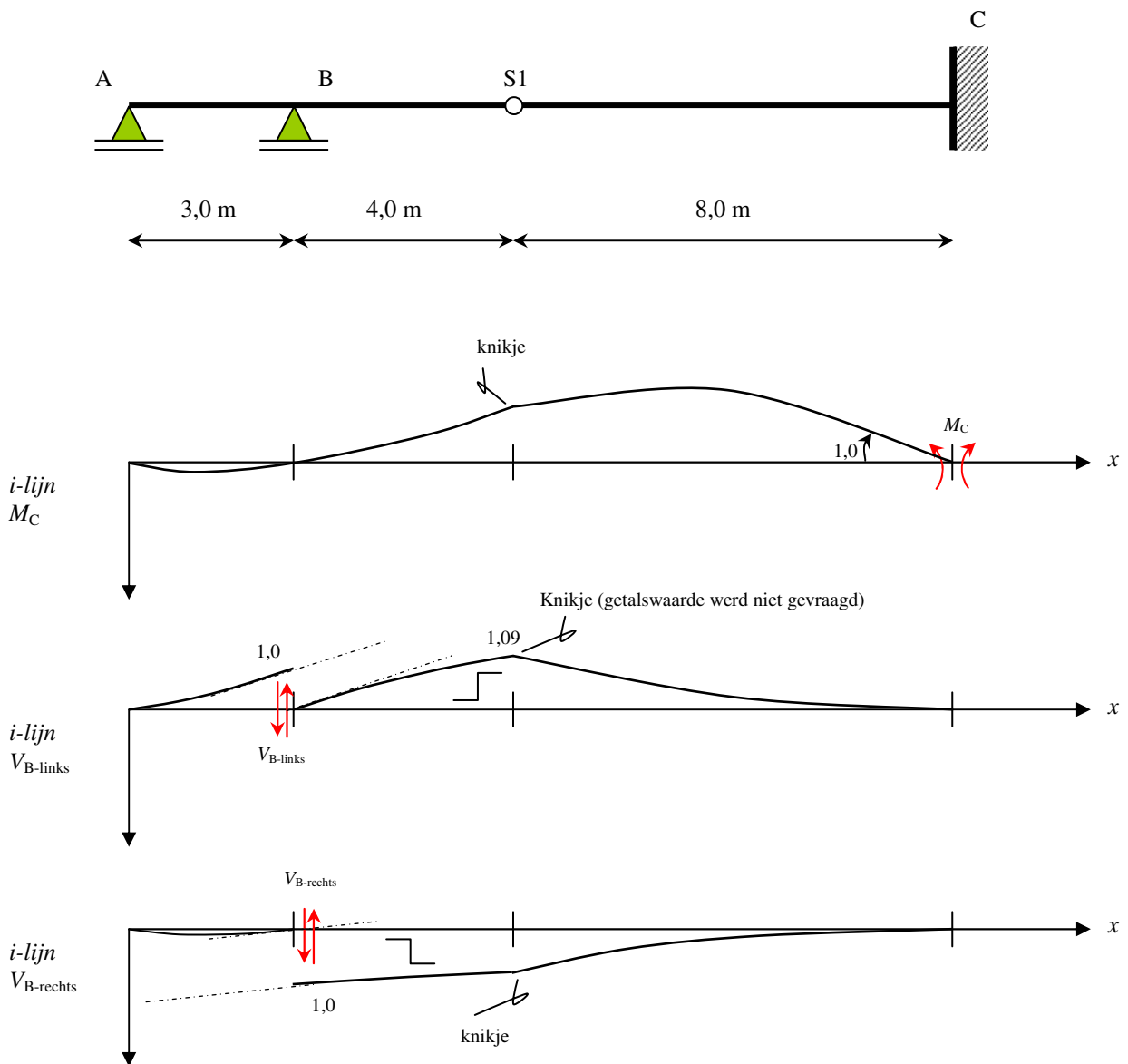
Opgave 1

Hier geen complete antwoorden op de theorie, slechts hints om je aan te zetten om echt in de theorie te duiken in de voorbereiding op het komende tentamen.

- a) Zie lesmateriaal. Uitleg over wat je moet doen om de invloedslijn te vinden levert de helft van de punten op. Uitleg waarom dat zo is levert de resterende helft op. In beide delen moet je Maxwell verwerken, zoek dat uit in het leermiddel!
- b) Graag een schetsje en een echte uitleg hoe je aan de formule komt. Een academische ingenieur moet ook kunnen uitleggen waar een methode op is gebaseerd!
- c) Het star-plastische model en een ideaal profiel met een vormfactor 1,0 waren hier de sleutels in de uitleg. Zoek zelf op in het leermiddel wat hier achter steekt en waartoe dit allemaal leidt.
- d) Zie het leermiddel.

Opgave 2*Vragen deel 1 :*

Vragen deel 2:

**Opmerking:**

Deze laatste drie invloedslijnen zijn "pittig". Bij de beoordeling is soepel omgegaan met de juiste intenties van gegeven oplossingen.

Opgave 3

- a) Met een passend verplaatsingsveld wordt bedoeld een verplaatsingsveld dat voldoet aan de kinematische randvoorwaarden. In dit voorbeeld betreft het dan de zakking die nul moet zijn in A en B en de hoekverdraaiing die nul moet zijn bij de inklemming. Het gegeven verplaatsingsveld voldoet volgens de opgave aan **alle randvoorwaarden** dus ook aan de (dynamische) voorwaarde dat het moment in B nul moet zijn. Dit houdt in dat de 2^e afgeleide van het verplaatsingsveld nul moet zijn. Dit is dus de gevraagde extra voorwaarde waaraan wordt voldaan bij dit verplaatsingsveld.

- b) Gegeven is:

$$w(x) = \frac{3}{2}al^2x^2 - \frac{5}{2}alx^3 + ax^4$$

$$\text{kinematische randvoorwaarden:} \quad w(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad w(l) = 0;$$

Dit verplaatsingsveld voldoet ook nog aan de 4^e randvoorwaarde $M(l) = 0$.

- c) Een passend polynoom kan zijn (vier onbekenden i.v.m. de drie voorwaarden, zo houd je één vrije parameter over die met Rayleigh kan worden geoptimaliseerd) :

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\text{kinematische randvoorwaarden:} \quad w(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad w(l) = 0;$$

$$w(0) = a_0 = 0; \quad w'(0) = a_1 = 0;$$

$$w(l) = a_2l^2 + a_3l^3 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_3l$$

levert:

$$w(x) = -a_3lx^2 + a_3x^3 = a_3(x^3 - lx^2)$$

Een voldoende passend verplaatsingsveld in de vorm van een polynoom zou kunnen zijn : $w(x) = ax^2(x-l)$. Andere vormen mogen ook worden voorgesteld zolang deze tenminste voldoen aan de kinematische randvoorwaarden.

- d) Rayleigh : $F_k = \frac{\int \frac{1}{2} EI (w'')^2 dx}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$. Gebruik de handigheidjes op het formuleblad:

$$w(x) = \frac{3}{2}al^2x^2 - \frac{5}{2}alx^3 + ax^4$$

$$w(x) = a(c_1x^2 + c_2x^3 + x^4) \quad \text{met:} \quad c_1 = \frac{3}{2}l^2; \quad c_2 = -\frac{5}{2}l$$

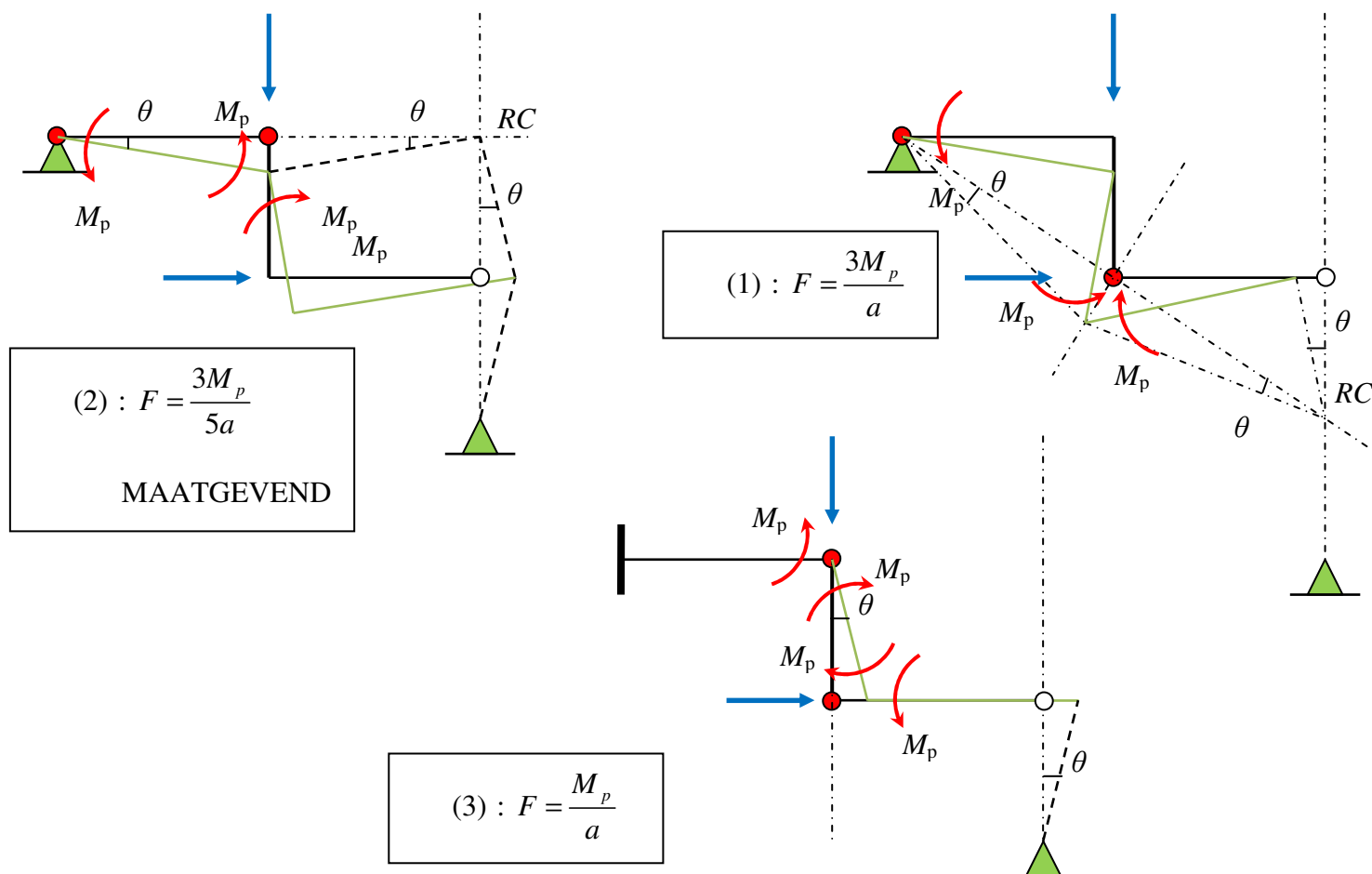
$$F_k = \frac{aEI \left(4c_1^2l + 12c_1c_2l^2 + 12c_2^2l^3 + 16c_1l^3 + 36c_2l^4 + \frac{144}{5}l^5 \right)}{a \left(\frac{4}{3}c_1^2l^3 + 3c_1c_2l^4 + \frac{9}{5}c_2^2l^5 + \frac{16}{5}c_1l^5 + 4c_2l^6 + \frac{16}{7}l^7 \right)} = \frac{EI \frac{9l^5}{5}}{\frac{3l^7}{35}} = \frac{21EI}{l^2}$$

- e) De “exakte” kniklast is $\frac{2\pi^2 EI}{l^2} \approx \frac{20EI}{l^2}$

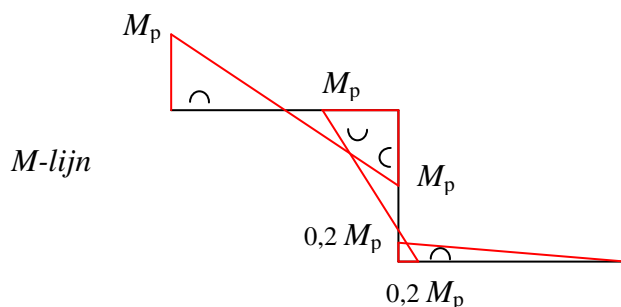
- f) Belangrijk is dat het gekozen verplaatsingsveld zo goed mogelijk overeenkomt met de exacte knikvorm. Bekend is (CT2031) dat in de werkelijke knikvorm een sinusvorm moet voorkomen. Een polynoom zal, ook al voldoet deze aan alle randvoorwaarden, dus nooit de exacte oplossing opleveren. Het lijkt dat de prachtige uitkomst, zo dicht bij de exacte oplossing, komt door het voldoen aan alle randvoorwaarden maar deze gevolgtrekking is in zijn algemeenheid onjuist. In de gekozen oplossing moeten dus voor een zo goed mogelijk resultaat, de noodzakelijke componenten uit de werkelijke oplossing zitten. Als je weet dat in de algemene oplossing van een knikprobleem naast polynomen ook sinus en cosinus termen moeten voorkomen dan ligt het voor de hand om deze componenten in het aangenomen verplaatsingsveld op te nemen.

Opgave 4

- a) De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald. Er zijn maximaal twee plastische scharnieren noodzakelijk om een mechanisme te creëren. Hiervoor komen drie plaatsen in aanmerking. Er zijn zodoende maximaal drie mechanismen te onderzoeken. Het mechanisme met de laagste belasting is het bezwijkmechanisme en de daarbij behorende belasting is de bezwijkbelasting.
- b) De drie situaties zijn hieronder getekend, de mechanismen zijn zeer basaal en met virtuele arbeid is direct de bezwijklast te vinden: (let op zwakste schakel!)



- c) De momentenlijn behorende bij het bezwijkmechanisme is hieronder getekend (bepaal de verticale oplegreactie in A en vervolgens die in B).



Deze momentenlijn laat zien dat nergens in de constructie de sterkte wordt overschreden. De oplossing voldoet hiermee aan de eenduidigheidsis van Prager.

Opgave 5

- a) Zie basismechanica CT1041 en dictaat CT3109
 b) De buigstijfheid kan worden bepaald als de ligging van het NC is bepaald:

Ten opzichte van de bovenrand geldt voor het NC:

$$z_{NC} = \frac{E_h \left(\frac{1}{2} b h^2 \right) + E_s (92 \times 8 \times (h + 4))}{E_h b h + E_s \times 92 \times 8} = 115,1 \text{ mm}$$

$$EI_{zz} = E_h \left(\frac{1}{12} b h^3 + b h \times \left(\frac{1}{2} h - z_{NC} \right)^2 \right) + E_s \left(\frac{1}{12} \times 92 \times 8^3 + 92 \times 8 \times (154 - z_{NC})^2 \right)$$

$$EI_{zz} = 757,16 \times 10^9 \text{ Nmm}^2 = 757,16 \text{ kNm}^2$$

- c) Rekverdeling is lineair, de neutrale lijn is horizontaal i.v.m. de as van symmetrie. Met de rek boven en onder kan de verdeling worden getekend:

$$\varepsilon = \kappa_z z = \frac{M_z}{EI_{zz}} z; \quad \varepsilon(-115,1) = -0,000570$$

$$\varepsilon(150 - 115,1) = 0,000173 \quad \text{met : } M_z = \frac{1}{4} Fl \text{ !!!!}$$

$$\varepsilon(150 + 8 - 115,1) = 0,000213$$

- d) De normaalspanning moet worden bepaald voor het hout en het staal afzonderlijk. De verdeling over de hoogte is lineair. (schetsje maken!)

Hout: $\sigma_b = -0,00057 \times 10000 = -5,7 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_o = 0,00017 \times 10000 = 1,7 \text{ N/mm}^2$

Staal: $\sigma_b = 0,00017 \times 210000 = 36,3 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_o = 0,00021 \times 210000 = 44,6 \text{ N/mm}^2$

- e) Neem het staal als afgeschoven deel. De resultante normaalkracht ten gevolge van alleen buiging op het afgeschoven deel is:

$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} (36,3 + 44,6) \times 92 \times 8 = 29784,3 \text{ N}$$

De schuifkracht per eenheid van lengte wordt hiermee:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V = -\frac{29784,3 \times 2500}{3750000} = -19,9 \text{ N/mm} \quad (V = 2,5 \text{ kN !!!!})$$

- f) Vanwege de as van symmetrie (waardoor de hoofdrichtingen samenvallen met het y-z-assenstelsel) mogen de *vergeet-mij-nietjes* worden gebruikt:

$$w_C = \frac{Fl^3}{48EI_{zz}} = 3,7 \text{ mm}$$

- g) Bovenste kernpunt, neem een *n.l.* aan langs de onderste rand van de doorsnede:

$$e_z = \frac{1}{EA} \times EI_{zz} \times (-1/z_1) = -\frac{EI_{zz}}{EA} \times \frac{1}{150 + 8 - 115,1} = -57,9 \text{ mm}$$

Tentamen CT3109

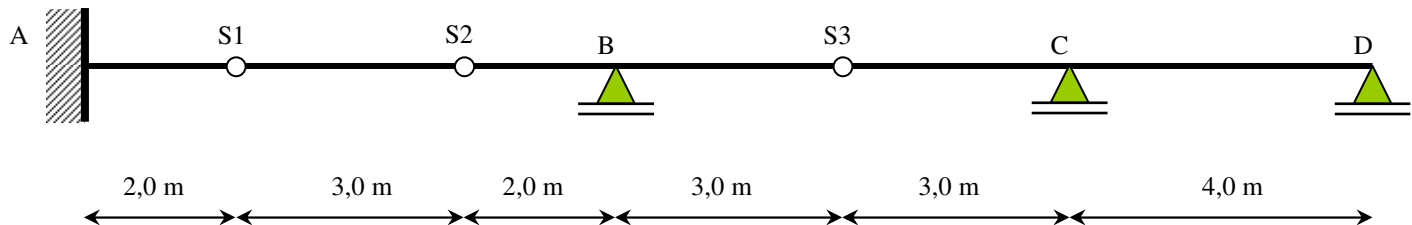
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

15 april 2013,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Invloedslijnen**(ca 45 min)**

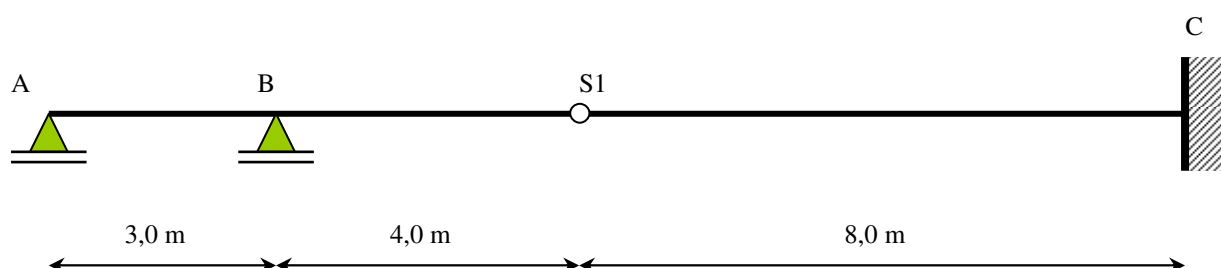
Deze opgave bestaat uit twee delen. Hieronder is een scharnierligger gegeven. De ligger is in A volledig ingeklemd en heeft drie scharnieren S1 t/m S3.

**Vragen deel 1:**

- Construeer de invloedslijn voor het inklemmingsmoment in A
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in B
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van S3
- Schets de invloedslijn voor de hoekverdraaiing in B
- Construeer de invloedslijn voor de zakking van scharnier S2

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

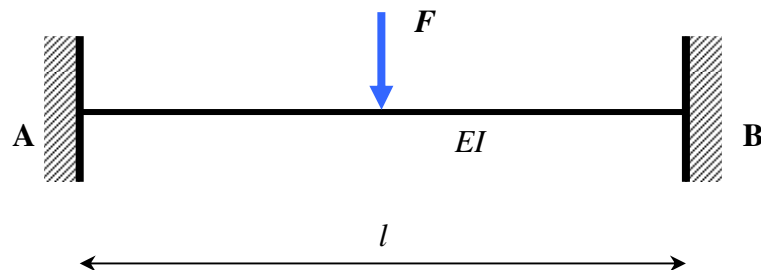
Een aangepaste constructie is hieronder weergegeven.

**Vragen deel 2:**

- Schets de invloedslijn voor het inklemmingsmoment in C
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Schets de invloedslijn voor de oplegreactie in A

OPGAVE 2 : Arbeid en Energie**(ca 45 min)**

Een links en rechts volledig ingeklemde ligger wordt halverwege belast door een verticale puntlast. De prismatische ligger heeft een buigstijfheid EI . Vervorming door dwarskracht en extensie mogen worden verwaarloosd.



Opmerking : Maak gebruik van het meegeleverde formuleblad !!!

Vragen:**Deel 1: Minimum potentiële energie**

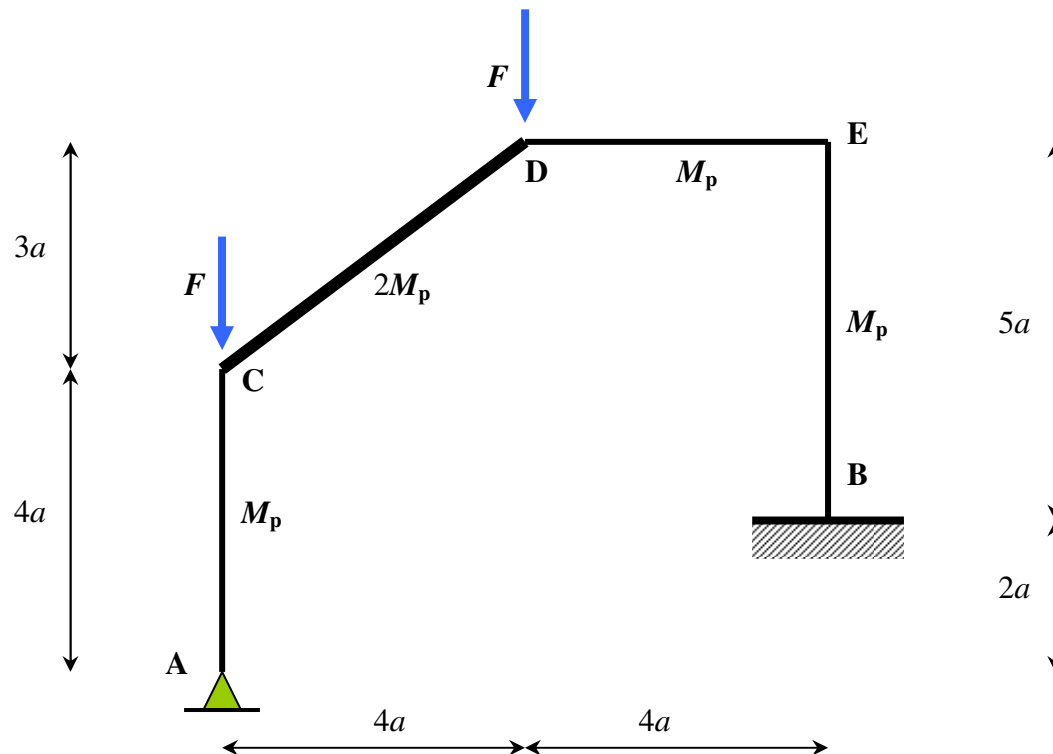
- Bepaal met behulp van het principe van minimum potentiële energie een schatting van de doorbuiging uitgedrukt in EI , F en l . Gebruik hiervoor een cosinus functie.
- Aan welke voorwaarden moet de door U opgestelde verplaatsingsfunctie voldoen?
- Bepaal op basis van uw antwoord bij a) de grootte van het inklemmingsmoment.

Deel 2: Castigliano

- Van dezelfde constructie wordt gevraagd de inklemmingsmomenten te bepalen met behulp van Castigliano. Leg uit hoe U dit aanpakt en bepaal de grootte van deze momenten.
- Vergelijk de uitkomst met het gevonden antwoord van deel 1. Beargumenteer eventuele verschillen.

OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 45 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. Het raamwerk is in B ingeklemd en in A scharnierend ondersteund. Het raamwerk wordt in C en D verticaal belast met een puntlast F . Staaf CD heeft een volplastisch moment $2M_p$, de overige staven hebben een volplastisch moment M_p .

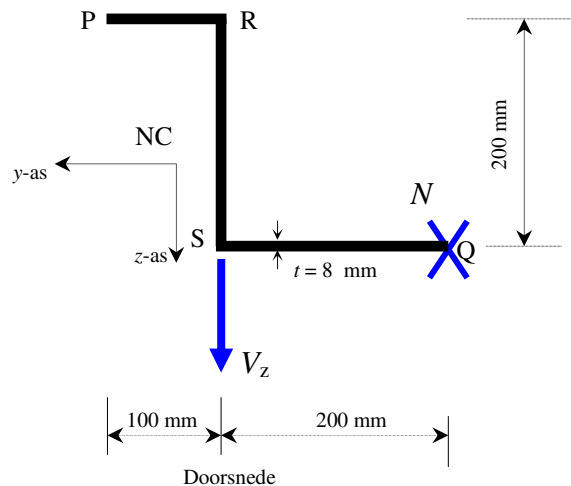
**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 45 min)**

Een kolom bestaande uit een z-profiel heeft een homogene doorsnede. Het betreft een stalen profiel, belast door een axiale drukkracht in punt Q en een dwarskracht met een werklijn die samenvalt met het lijf zoals in de onderstaande figuur is aangegeven. De dunwandige doorsnede heeft een elasticiteitsmodulus $E = 210 \text{ GPa}$.

Voor de doorsnedeberoekeningen wordt een y-z-assenstelsel aangehouden door het NC.



Gegevens: $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $N = -80 \text{ kN}$; $V_z = 10 \text{ kN}$
 $I_{yy} = 2040 \times 10^4 \text{ mm}^4$; $I_{zz} = 2773 \frac{1}{3} \times 10^4 \text{ mm}^4$;

Vragen :

- Leg uit wat de definitie is van het NC en bepaal de ligging ervan.
- Toon aan dat voor de weergegeven doorsnede geldt:

$$|I_{yz}| = 1760 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

TIP: Maak gebruik van het feit dat de doorsnede dunwandig is

- Bepaal de normaalspanningsverdeling over de doorsnede en teken deze. Geef in deze figuur ook de ligging van de neutrale lijn weer en het vlak van de belasting $m - m$ en kromming $k - k$.
- Welke vorm heeft de kern van deze doorsnede?
- Bepaal het onderste kernpunt van deze doorsnede.
- Wordt deze doorsnede op torsie belast? (motiveer uw antwoord zonder te rekenen)

THEORIE

- Als de schuifspanning gevraagd wordt in de flens t.p.v. punt R t.g.v. de gegeven dwarskracht in de doorsnede, geef dan aan hoe U deze zou bepalen.

LET OP: De berekening wordt niet gevraagd alleen de stappen hoe deze kan worden bepaald. Wees zorgvuldig in het aangeven van de stappen die gebaseerd moeten zijn op de aannamen volgens de theorie!

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:

$$\int_0^l \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{l}{2}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

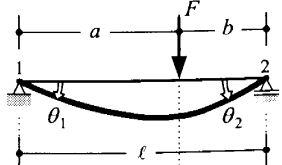
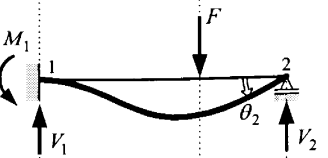
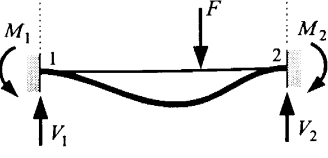
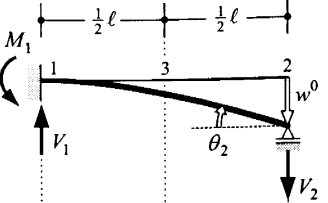
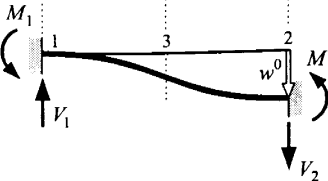
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

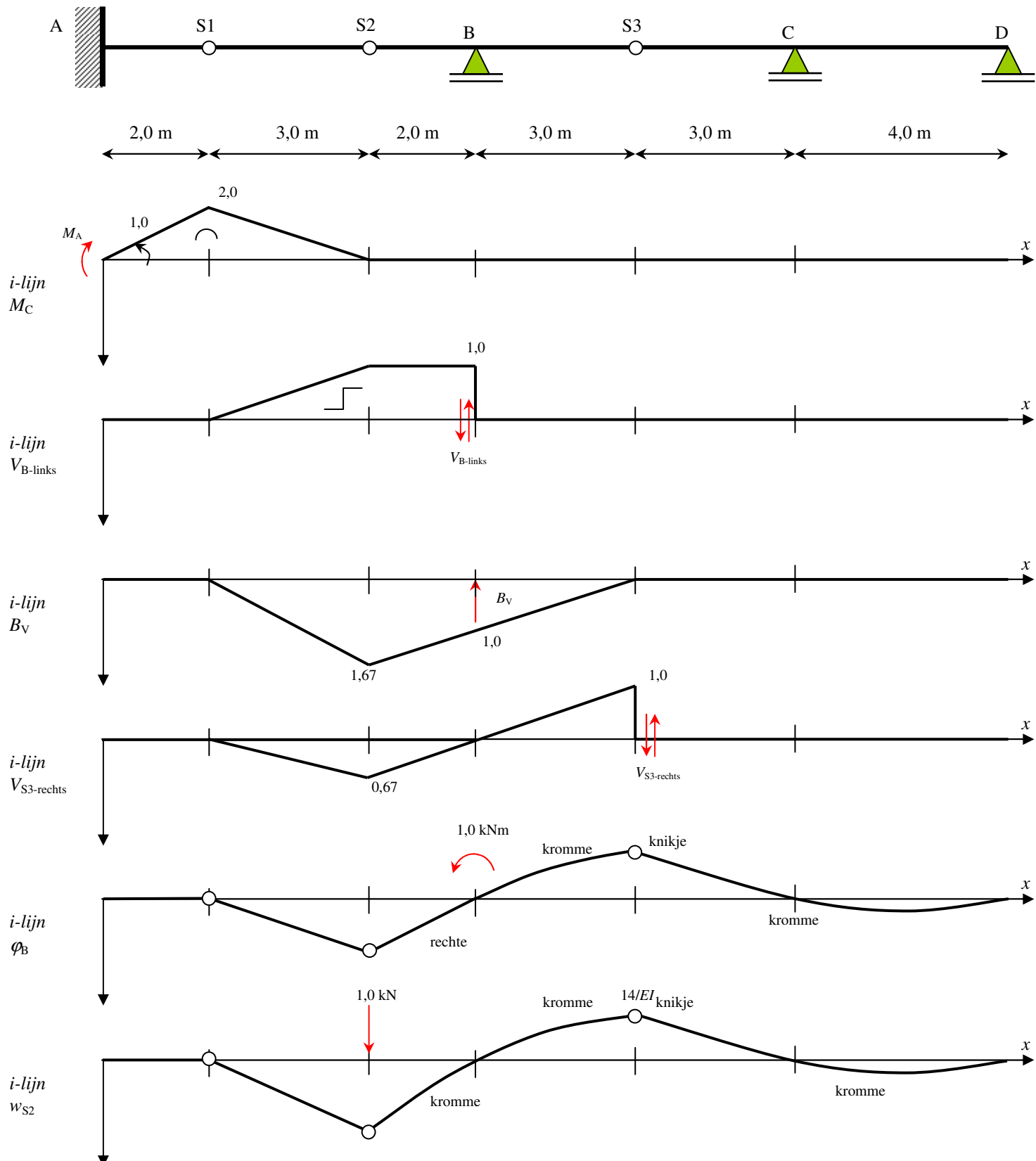
drie bij-de handjes

zettingen

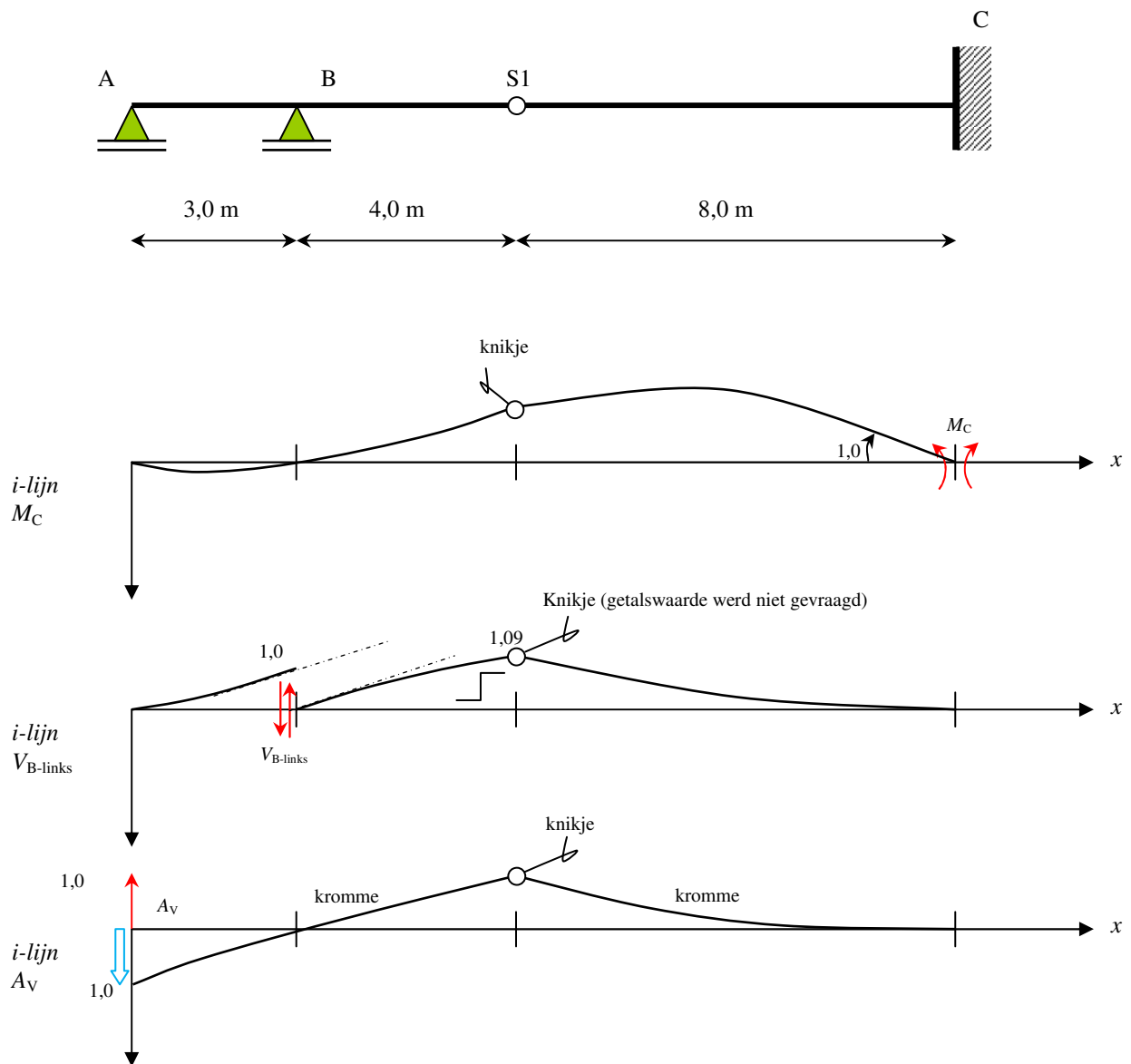
BEKNOPTE ANTWOORDEN

Opgave 1

Vragen deel 1 :



Vragen deel 2:

**Opmerking:**

Deze laatste drie invloedslijnen zijn "pittig". Bij de beoordeling is soepel omgegaan met de juiste intenties van gegeven oplossingen.

Opgave 2

- a) Neem een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld aan op basis van een cosinus functie (gegeven tip):

$$w(x) = \frac{1}{2}a \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right)$$

De potentiaalfunctie wordt hiermee:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx - Fa = \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx - Fa \quad \text{met: } \kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{2a\pi^2}{l^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Uitwerken levert:

$$V = \frac{a^2 \pi^4 EI}{l^3} - Fa \quad \frac{dV}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{Fl^3}{2\pi^4 EI} \approx \frac{Fl^3}{194,8 EI}$$

Merk op:

Dit resultaat van 194,8 wijkt weinig af van de 192 die gevonden wordt m.b.v. de exacte oplossing volgens het *vergeet-mij-nietje*. (zie formuleblad)

- b) De verplaatsingsfunctie moet voldoen aan de kinematische randvoorwaarden (m.b.t. de rotatie en zakking).
c) Het moment bij de inklemming volgt uit het verplaatsingsveld:

$$M(x) = EI \kappa(x) = -\frac{Fl}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$M(0) = \frac{-Fl}{\pi^2} \approx -\frac{1}{10} Fl$$

Er ontstaat bij de inklemming een moment dat trek aan de bovenzijde oplevert met een grootte van ongeveer $0,1Fl$.

- d) Oplossen met behulp van Castigliano kan door de statisch onbepaalde constructie statisch bepaald te maken en de vormveranderingsvoorwaarde m.b.v. Castigliano uit te werken. Kies hiervoor als statisch bepaald hoofdsysteem de ligger op twee steunpunten met een inklemmingsmoment M_A dat trek aan de bovenzijde oplevert. Maak daarbij gebruik van de symmetrie van de constructie. (teken dit zelf) De momentenverdeling t.g.v. de puntlast en de statisch onbepaalde is voor de halve ligger:

$$M(x) = -M_A + \frac{1}{2}Fx \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

De vormveranderingsenergie kan hiermee worden bepaald als:

$$E_v = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{F^2 l^3}{96EI} - \frac{4M_A Fl^2}{8EI} + \frac{M_A^2 l}{2EI}$$

De hoekverdraaiing bij A moet nul zijn, uitwerken levert:

$$\varphi_A = \frac{dE_v}{dM_A} = 0 \Rightarrow \frac{M_A l}{EI} - \frac{Fl^2}{8EI} = 0$$

$$M_A = \frac{1}{8} Fl$$

- e) De verschillen in de gevonden momenten zijn groter dan die bij de verplaatsing. Dat komt omdat de tweede afgeleide van de aangenomen verplaatsingsfunctie een grotere afwijking heeft t.o.v. de werkelijke kromming. Hierdoor neemt de onnauwkeurigheid toe.

Opgave 3

- a) De constructie is twee-voudig statisch onbepaald, er zijn maximaal drie plastische scharnieren nodig voor een mechanisme. Deze scharnieren kunnen op vier plaatsen optreden waarmee er maximaal vier mechanismen moeten worden onderzocht. Merk op een mechanisme met minder scharnieren behoort soms ook tot de mogelijkheden! Teken de schetsjes van de mogelijke mechanismen en controleer dit eventueel met het programma Mp van de website.

Opmerkingen

- Let op dat de zwakste schakel in een plastisch scharnier maatgevend is en dat de momenten in de staafansluitingen links en rechts even groot zijn, fouten worden niet gewaardeerd!
- In het geval de scharnieren optreden in C, E en B zullen de puntlasten uitsluitend horizontaal verplaatsen (schrans-mechanisme). De puntlasten leveren dan geen arbeid en de bezwijklast is daarmee oneindig. Dit is zeker niet het maatgevende geval (laagste bezwijklast) en hoeft daarom niet onderzocht te worden.

- b) De drie overige mechanismen leveren:

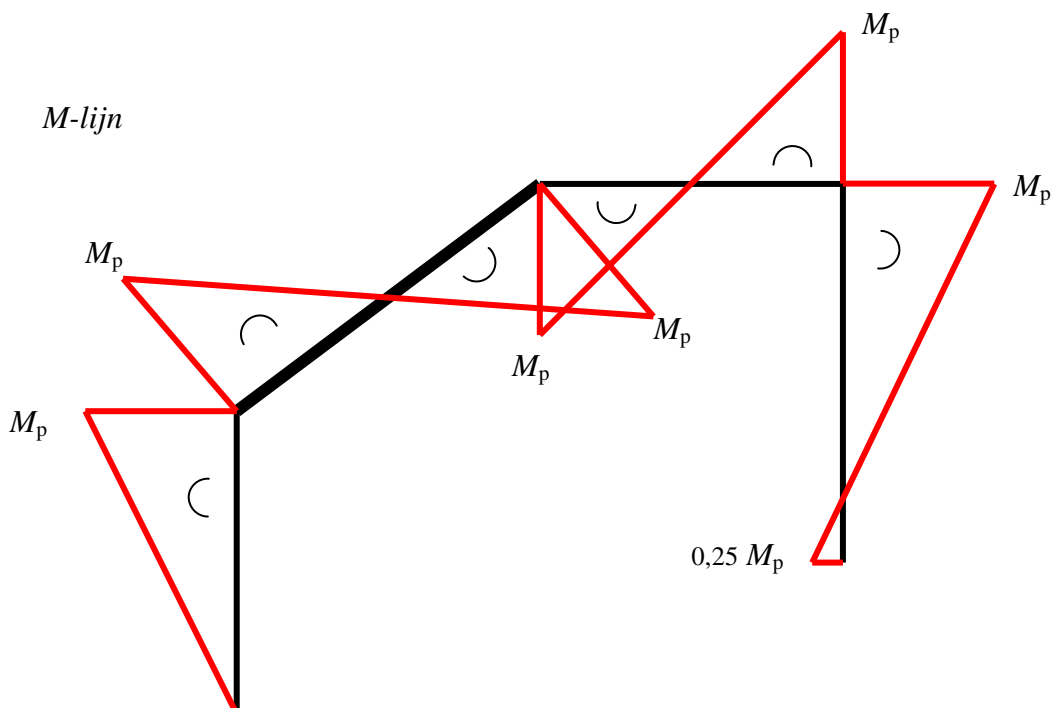
$$DEB \quad F_p = \frac{29M_p}{20a} = 1,45 \frac{M_p}{a}$$

$$CDB \quad F_p = \frac{3M_p}{2a} = 1,5 \frac{M_p}{a}$$

$$CDE \quad F_p = \frac{19M_p}{16a} = 1,187 \frac{M_p}{a} \quad (\text{bezwijklast})$$

De laatste oplossing levert de laagste kniklast en is maatgevend.

- c) De eenduidigheidsstelling van Prager levert m.b.t. de momentenlijn:



Conclusie, nergens in de constructie wordt de sterkte overschreden waarmee de laagst gevonden bezwijklast ook de juiste moet zijn.

Opgave 4

- a) Zie dictaat
- b) Van de homogene, dunwandige doorsnede, ligt het NC t.o.v. punt P op een afstand van:

$$y_{NC} = 130 \text{ mm}; \quad z_{NC} = 120 \text{ mm};$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2040 & -1760 \\ -1760 & 2733,33 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Hier worden alleen de antwoorden gegeven, berekening van I_{yz} moet netjes compleet zijn, het ging hier uiteraard om het min teken!

- c) Normaalspanning is lineair over de hoogte en afhankelijk van de vervorming in de doorsnede (vergeet de E -modulus niet in de onderstaande berekening):

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

$$\text{met: } N = -80 \times 10^3 \text{ N}; \quad M_y = 13,6 \times 10^6 \text{ Nmm}; \quad M_z = -6,4 \times 10^6 \text{ Nmm};$$

Oplossen levert:

$$\varepsilon = -9,5 \times 10^{-5}; \quad \kappa_y = 4,92 \times 10^{-6}; \quad \kappa_z = 2,02 \times 10^{-6};$$

Spanningen kunnen worden bepaald in de punten P, R, S en Q:

$$\sigma_P = 63,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_R = -40,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_S = 45,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_N = -161,67 \text{ N/mm}^2$$

Teken in de figuur met de spanningsverdeling de neutrale lijn, het krommingsvlak $k-k$ en het belastingsvlak $m-m$. Deze figuur moet compleet zijn!

- d) Als de doorsnede niet dunwandig wordt opgevat is de kern een polygon met 6 hoekpunten, als de dunwandigheid wordt meegenomen dan is de kern een ruit met vier hoekpunten.
- e) Het onderste kernpunt wordt gevonden door de neutrale lijn te laten raken aan de bovenzijde van de doorsnede :

$$y_1 = \pm\infty; \quad z_1 = -120 \text{ mm};$$

$$e_{y-\text{onder}} = -36,67 \text{ mm}; \quad e_{z-\text{onder}} = 57,77 \text{ mm};$$

- f) Ja, de dwarskracht grijpt aan langs RS, op deze lijn ligt niet het dwarskrachtencentrum. Er ontstaat een wringend moment dat kan worden bepaald m.b.v. de loodrechte afstand tussen het DC en RS en de grootte van de dwarskracht.

Allerlei prachtige verhandelingen over het dwarskrachtencentrum zonder een concreet antwoord op de vraag of in dit geval de doorsnede op torsie wordt belast, werden niet gewaardeerd.

- g) De schuifspanning wordt bepaald op basis van de normaalspanning t.g.v. buiging. Het probleem bij deze vraag is, dat het moment afhankelijk is van N . Er moet dus zowel ingegaan worden op het feit dat de invloed van de normaalkracht op de normaalspanningen niet mee mag worden genomen EN dat er een dummy moment M moet worden aangenomen om op basis van dit moment een normaalspanning te kunnen bepalen voor het berekenen van de schuifspanning.

Stel de N op nul, neem een dummy M_z aan (b.v. 1,0) en bepaal eerst de normaalspanningsverdeling op basis van deze belasting. Bepaal vervolgens de schuifspanningsverdeling door PR als afgeschoven deel vrij te maken. Bepaal de resultante normaalkracht $R^{(a)}$ op dit deel (t.g.v. alleen het buigend moment want $N = 0$) en bepaal hiermee met de gegeven totale dwarskracht V de schuifstroom. Deel de schuifstroom door de dikte van het plaatmateriaal om de schuifspanning te verkrijgen. Een berekening werd niet gevraagd maar deze schuifspanning is daarmee $4,06 \text{ N/mm}^2$.

Tentamen

CTB3330/CT3109-09/CIE3109

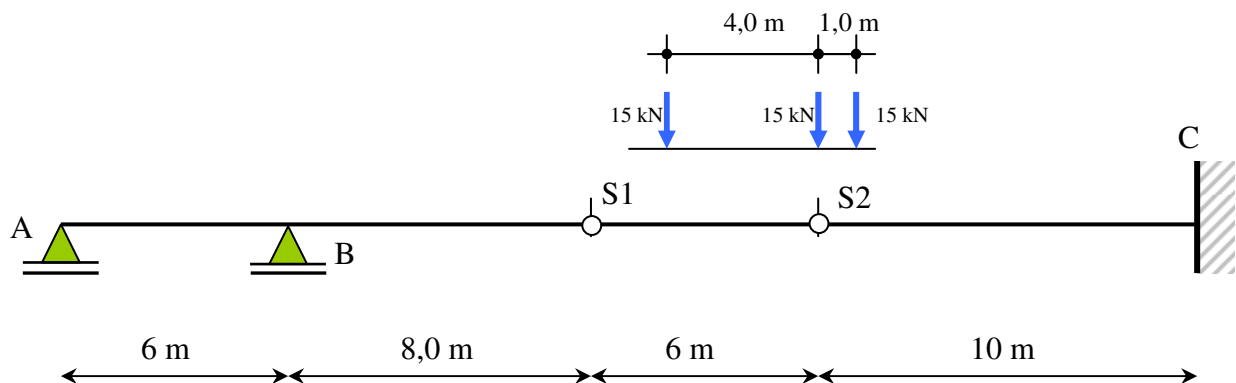
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

14 april 2014,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Invloedslijnen**(ca 45 min)**

Een laststelsel bestaande uit drie lasten van elk 15 kN rijdt over de onderstaande scharnierligger. De lasten hebben een vaste afstand tot elkaar zoals in de figuur is aangegeven.

**Vragen :**

Construeer voor deze constructie, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De verticale oplegreactie in A
- Het inklemmingsmoment in C
- De dwarskracht direct links van het scharnier S1
- De dwarskracht direct rechts van het scharnier S2
- De dwarskracht direct rechts van B
- De zakking van het scharnier S2

Schets voor deze constructie, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De hoekverdraaiing in B
- De zakking halverwege B en scharnier S1

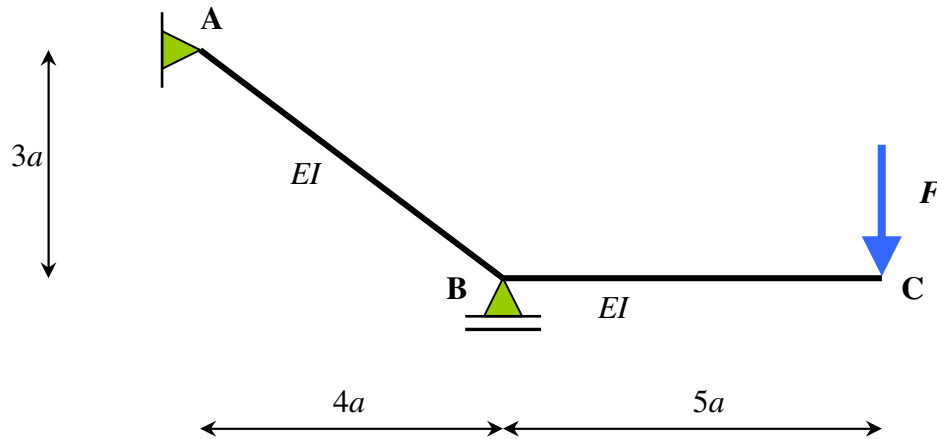
Wat is de meest ongunstige positie voor het laststelsel en bepaal de grootte van de gevraagde grootheid in deze situatie voor :

- Het inklemmingsmoment in C
- De dwarskracht in B

Opmerking : Construeren houdt in dit verband in dat de vorm en de invloedsfactoren van de invloedslijn volledig zijn bepaald.

OPGAVE 2 : Arbeid en Energie**(ca 40 min)**

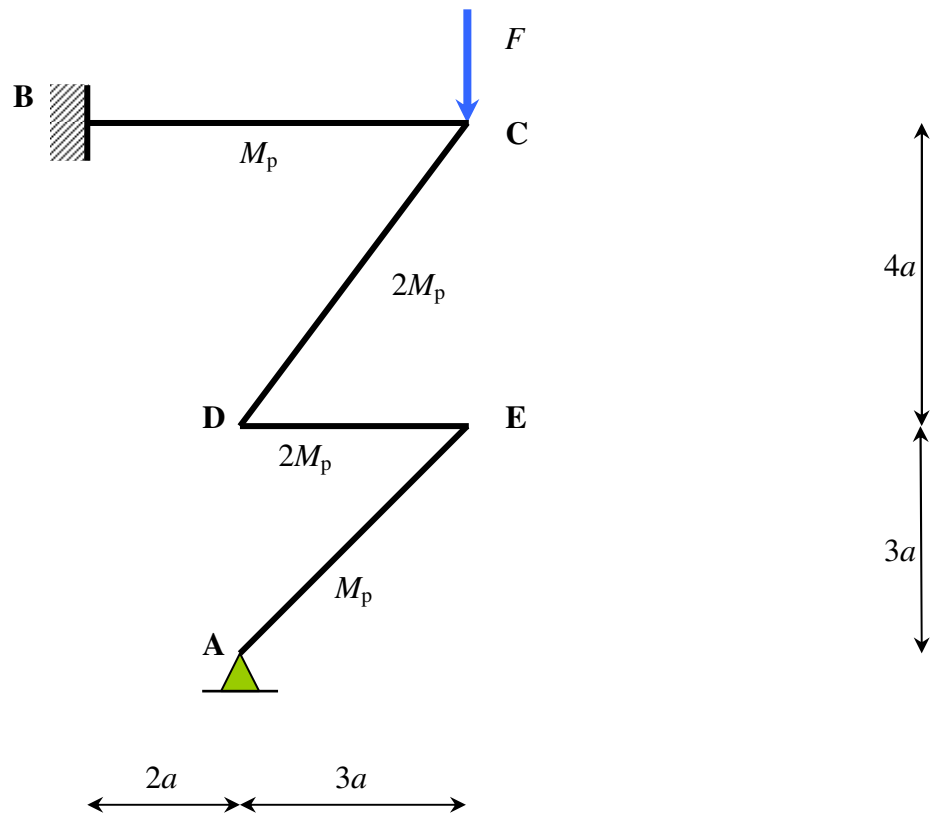
Een geknikte ligger ABC wordt in C verticaal belast met de aangegeven puntlast. De buigstijfheid van de prismatische staaf is EI . Invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.

**Vragen:**

- Schets de momentenlijn inclusief de vervormingstekens voor deze ligger en geef de extremen aan uitgedrukt in F en a .
- Bepaal de vormveranderingsenergie t.g.v. buiging die in deze constructie is opgeslagen.
- Bepaal met behulp van Castigliano de zakking in C uitgedrukt in F , a en EI .
- Bepaal met behulp van Castigliano de hoekverdraaiing in B uitgedrukt in F , a en EI .

OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 45 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. De staafdelen hebben de in de figuur aangegeven sterkte.

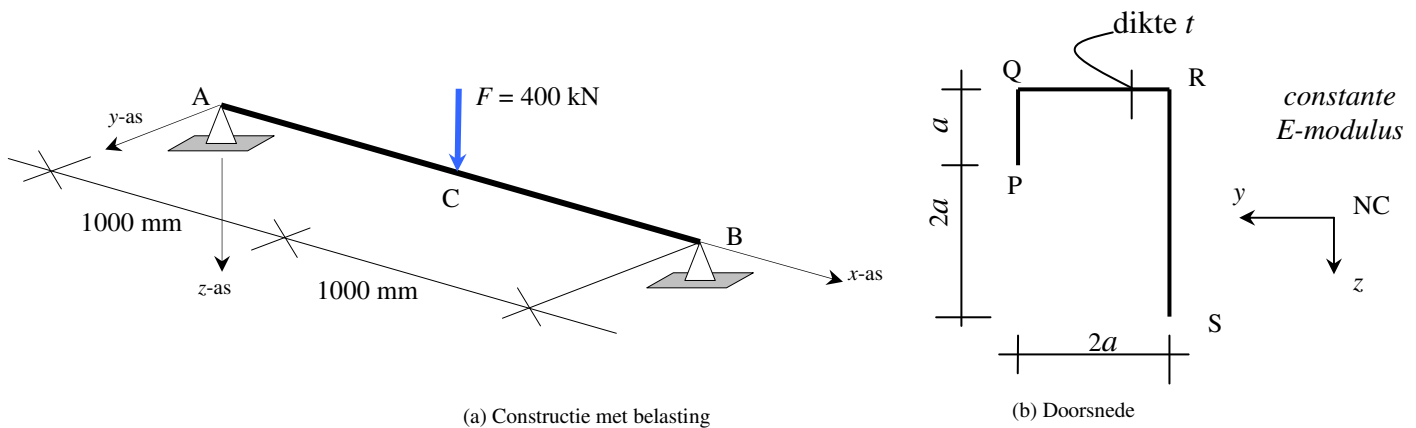
**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en geef deze met schetsjes weer.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.
- Wat houdt de eenduidigheidsstelling van Prager in?

OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 50 min)**

Een in A en B opgelegde balk heeft een niet-symmetrische doorsnede. De ligger wordt in de z -richting belast met een puntlast F halverwege de overspanning zoals in figuur (a) is aangegeven.

De doorsnede bestaat uit een dunwandig geknikt profiel met een constante plaatdikte t zoals is aangegeven in figuur (b). Er mag worden aangenomen dat de belasting in de doorsnede aangrijpt in het dwarskrachtencentrum waardoor geen wringing ontstaat.



Gegeven : $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$; $a = 180 \text{ mm}$; $t = 10 \text{ mm}$;

Vragen :

- a) Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC en toon aan dat voor de weergegeven doorsnede geldt :

$$EI_{yy} = 4ta^3 E; \quad EI_{yz} = -\frac{7}{3}ta^3 E; \quad EI_{zz} = \frac{31}{6}ta^3 E$$

- b) Teken de doorsnede (schaal 1:5) en geef de ligging aan van het belastingvlak m en het krommingsvlak k .
 c) Toon aan dat t.p.v. doorsnede C de vergelijking voor de neutrale lijn kan worden weergegeven met:

$$70y + 120z = 0$$

- d) Teken in de doorsnede de ligging van deze neutrale lijn en bepaal de normaalspanningsverdeling over het deel RS en zet deze loodrecht uit op het plaatmateriaal.

Beantwoord t.a.v. het schuifspanningsverloop de volgende vragen:

- e) Bepaal over het deel RS het verloop en de richting van de schuifspanning,
 f) Waar treedt over dit deel de maximale schuifspanning op en hoe groot is deze ?
 g) Teken voor dit deel het verloop van de schuifspanning en geef de relevante waarden aan in de tekening.

Opmerking: Ga voor de bepaling van de schuifspanningen uit van een positieve snede juist links van C.

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:

geen

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

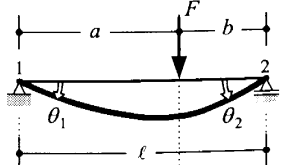
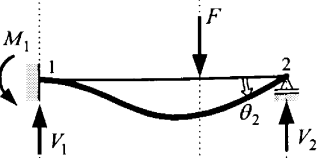
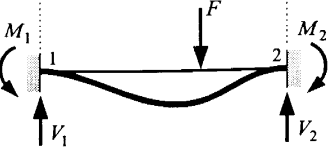
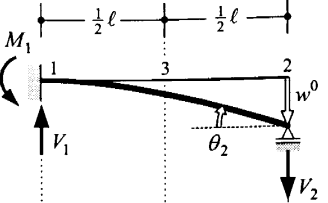
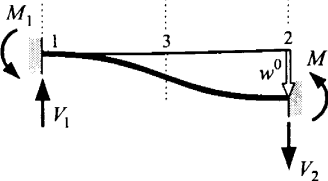
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Exam CIE3109

STRUCTURAL MECHANICS 4

14 April 2014,
09:00 – 12:00 hours

- This exam consists of 4 **problems**.
- Use for each problem a separate sheet of paper.
- Do not forget to mention your name and number on each paper.
- Work neat and tidy, the quality of the presentation can be used in the grading.
- The use of Phone's or computers, PDA's and /or Wifi or Blue Tooth equipment is not allowed. Turn off the equipment and remove it from your table.
- A scientific (programmable) calculator is allowed
- All required formulas can be found on the last pages of this exam
- Keep an eye on the clock and use the specified times per problem as guidance.

Problem 1 : Influence lines**(45 min)**

A load system which consists of three concentrated loads of 15 kN each moves over a hinged beam as shown in figure 1. The hinged beam has hinges S1 and S2.

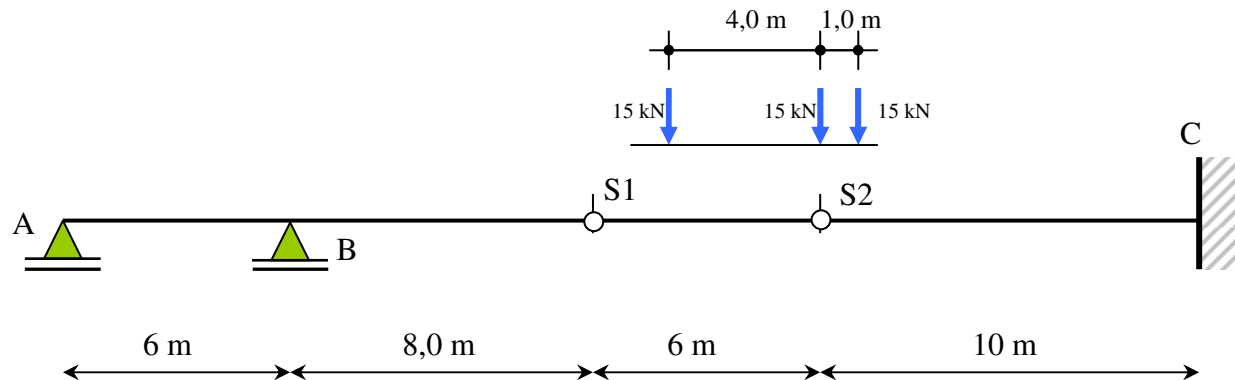


Figure 1 : Hinged beam

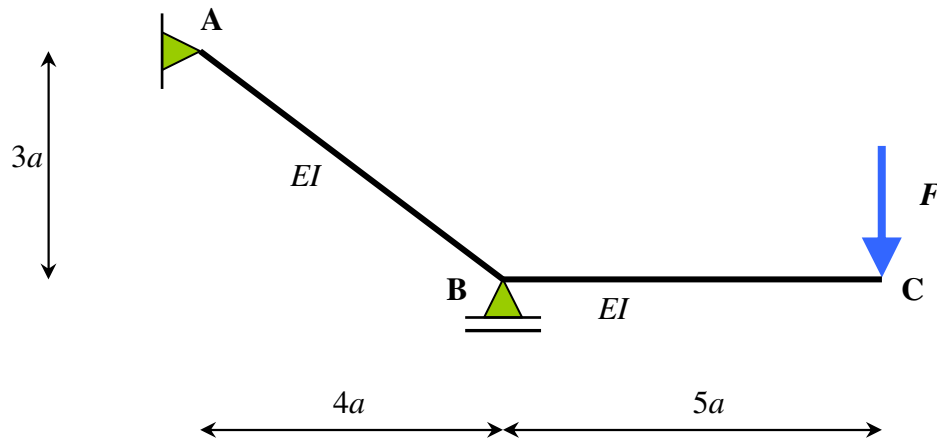
Questions:

- Construct the influence line for the support reaction at A,
- Construct the influence line for the moment at C,
- Construct the influence line for the shear force directly to the left of S1,
- Construct the influence line for the shear force directly to the right of S2,
- Construct the influence line for the shear force directly to the right of support B,
- Construct the influence line for the deflection of hinge S2
- Sketch the influence line for the rotation at B
- Sketch the influence line for the deflection at midspan between B and hinge S1,
- Find the most unfavorable position of the load system for the moment at C,
- Find the most unfavorable position of the load system for the shear force at B.

Note : "Construct" requires a correct sketch and the computed values of the influence factors at key points in the graph. Thus showing a qualitative and quantitative result. Sketching requires only a qualitative result from which it should become clear if member parts will remain straight or become curved.

Problem 2 : work and energy methods**(40 min)**

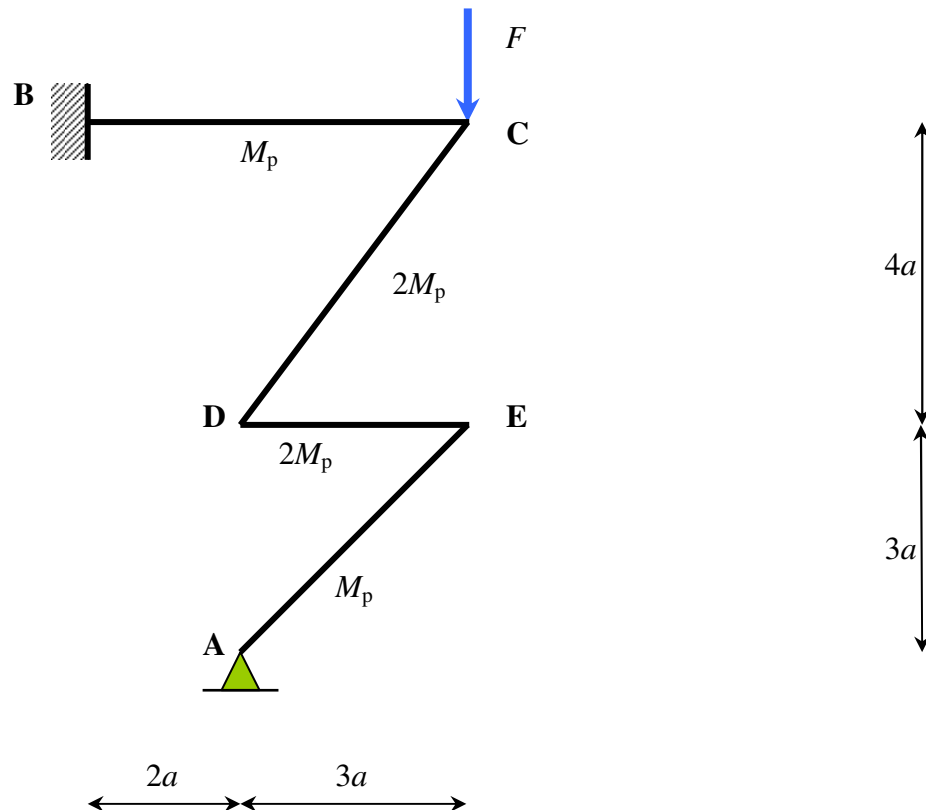
A bent beam is loaded with a concentrated load at C. The prismatic beam has a bending stiffness EI and axial deformation can be neglected.

**Questions:**

- Sketch the moment distribution for this load case. Show clearly the deformation signs and write down the extreme value of the bending moment.
- Find the expression for the total amount of strain energy due to bending expressed in F , a and EI .
- Find, using Castigliano's theoreme, the deflection at C expressed in F , a and EI .
- Find, , using Castigliano's theoreme, the rotation at B expressed in F , a and EI .

Problem 3 : Plasticity**(45 min)**

In the following figure a frame is shown. The concentrated load acts at C and BC and AE have a strength of M_p . The parts DC and DE have a strength $2M_p$.

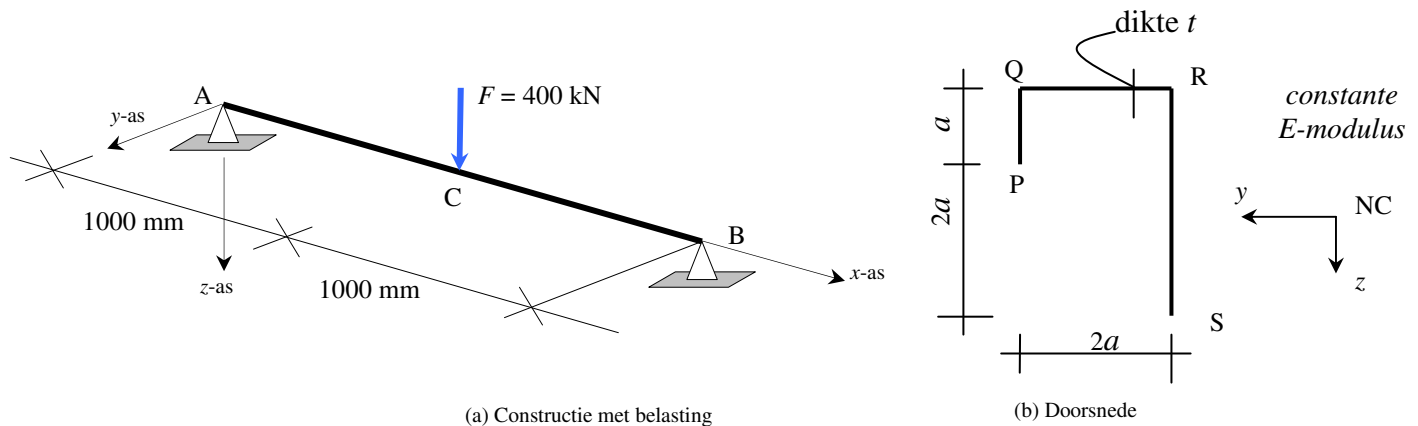
**Questions:**

- Determine the possible collapse mechanisms and show these with small sketches.
- Compute the collapse load F_p and prove the uniqueness of your solution.
- Show the moment distribution at collapse.
- What does the uniqueness theorem of Prager mean?

Problem 4**(50 min)**

A simply supported beam with an asymmetrical cross section is loaded in the z -direction with a concentrated load F at mid span as indicated in figure (a).

The cross section consists of a so-called thin walled section with constant thickness t as shown in figure (b). We assume that the load acts at the shear centre of the cross section. Therefore no torsion is generated. The influence of the deformation due to a possible normal force is neglected.



Gegeven : $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$; $a = 180 \text{ mm}$; $t = 10 \text{ mm}$;

Questions :

- a) Find the location of the normal force centre en prove that for the given cross section at C holds:

$$EI_{yy} = 4ta^3 E; \quad EI_{yz} = -\frac{7}{3}ta^3 E; \quad EI_{zz} = \frac{31}{6}ta^3 E$$

- b) Draw the cross section (scale 1:5) and show the position of the neutral axis, the plane of loading $m-m$ and the plane of curvature $k-k$.
 c) Show that the neutral axis can be represented by:

$$70y + 120z = 0$$

- d) Determine the stress distribution for the cross section at C. Show in a table the numerical values of the stresses at P, Q, R and S.

Answer with respect to the shear stress distribution the following questions

- e) The shape and sign of the shear stress distribution for RS,
 f) Find the location and the magnitude of the maximum shear stress between RS,
 g) Draw the shear stress distribution for RS and show the direction and its value at characteristic points.

FORMULAS

Inhomogeneous and/or asymmetrical cross sections :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{and:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{or:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Deformation energy:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extension})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{bending})$$

Complementary energy:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extension})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{bending})$$

Castigliano's theorema's:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Math tools:

none

Kinematic relations:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutive relations:

$$N = EA \varepsilon$$

$$M = EI \kappa$$

Work method with unit load:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

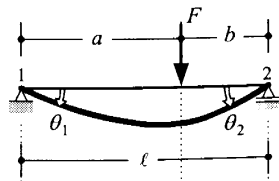
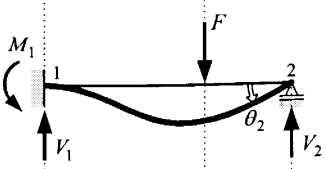
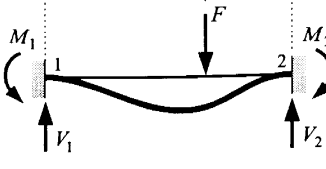
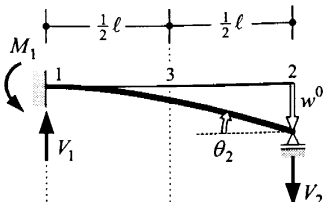
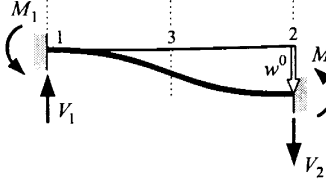
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

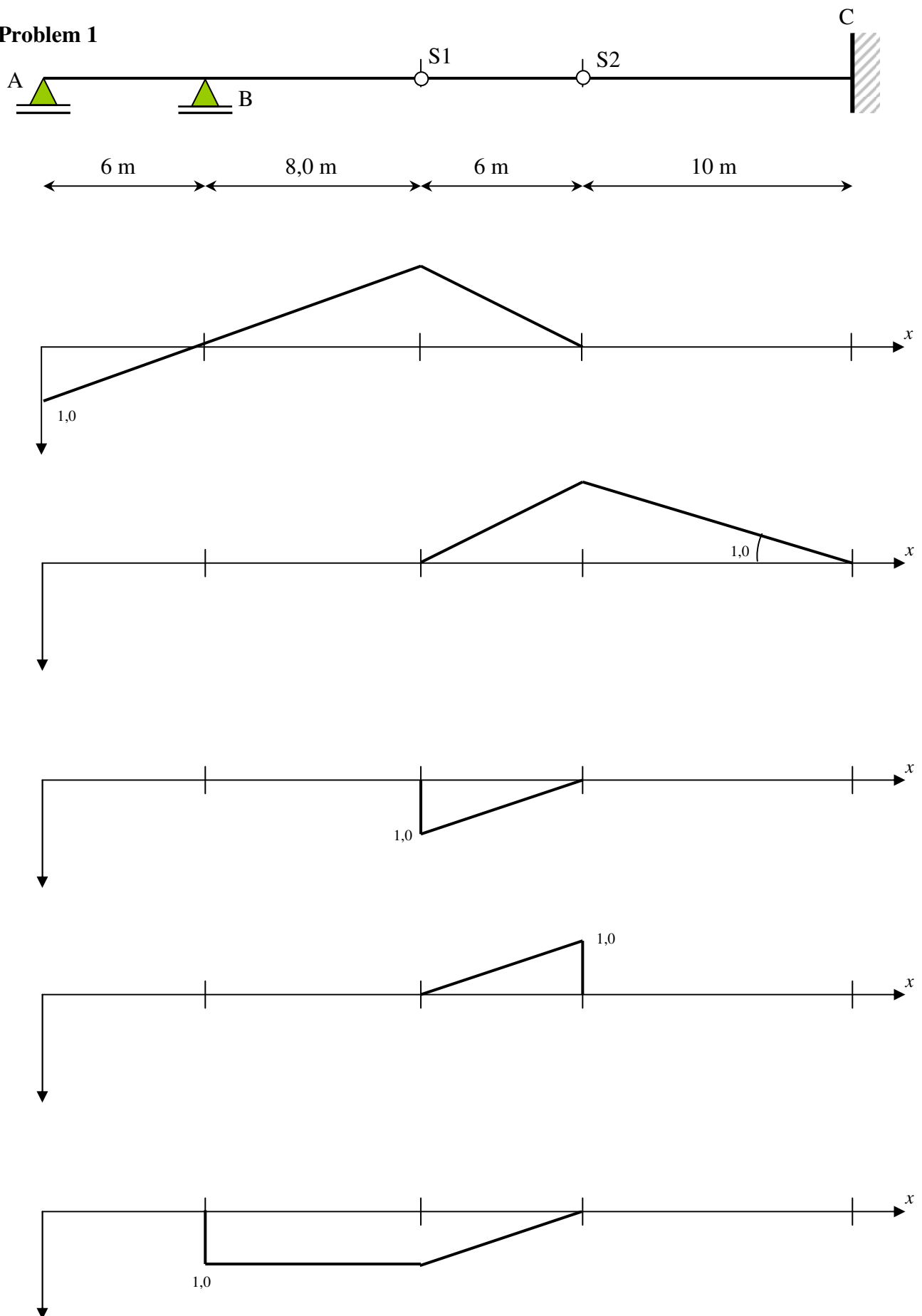
(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

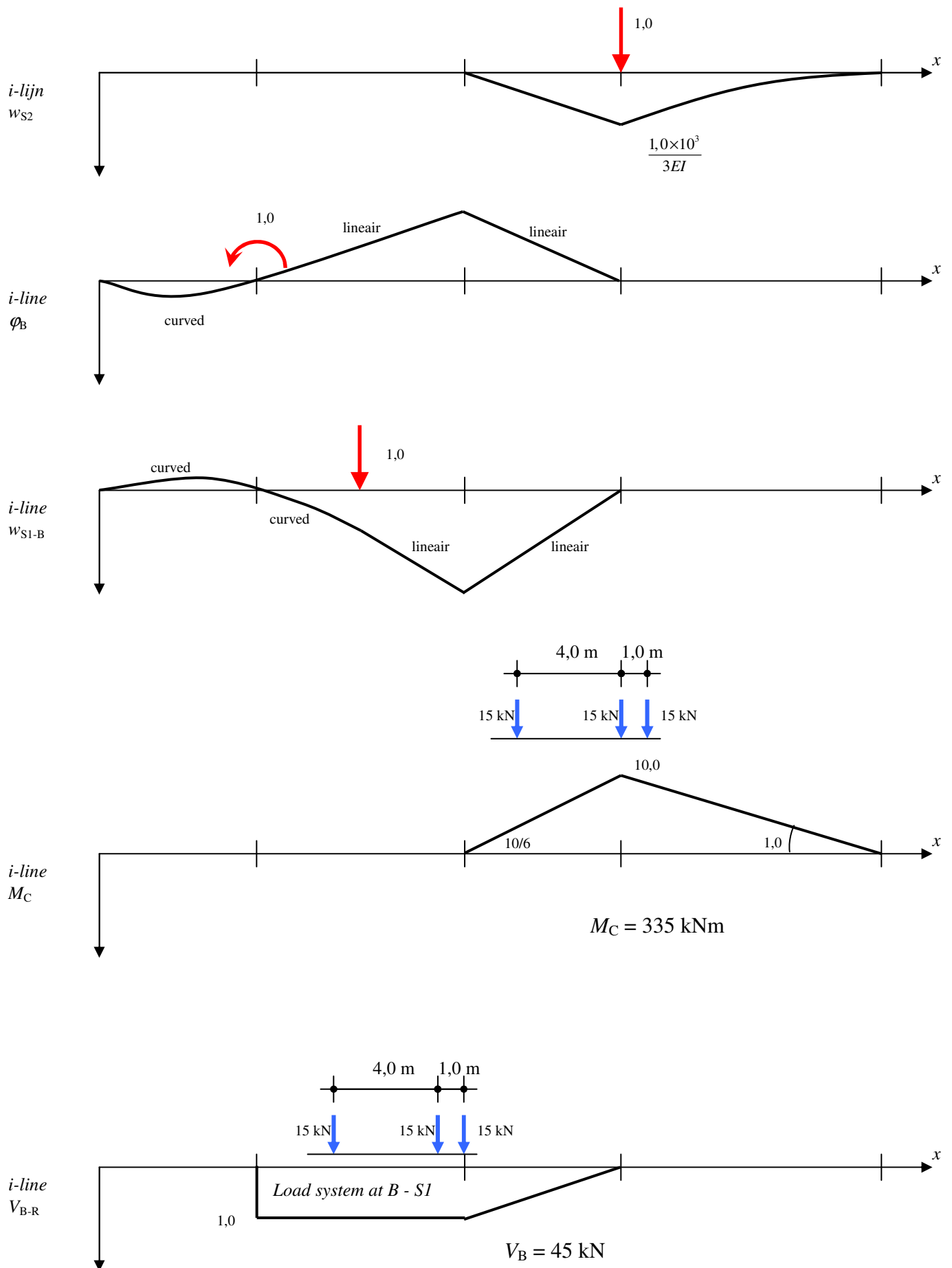
drie bij-de handjes

zettingen

ANSWERS

Problem 1





Problem 2

- a) Linear moment distribution at AB with a maximum of $5Fa$ at B. Subsequently returning to zero at C. The deformation symbol for this entire part is $\cap$.
- b) Assume a local coordinate system with the x -axis along the beam axis. Both member parts have an identical moment distribution:

$$M^{AB}(x) = -\frac{5Fa x}{5a} = Fx$$

The strain energy thus becomes:

$$E_v = 2 \int_{x=0}^{x=5a} \frac{M^{AB}(x)^2}{2EI} dx = \frac{125F^2 a^3}{3EI}$$

- c) Differentiate this energy with respect to the load in order to obtain the displacement according to Castigliano's principle:

$$w = \frac{dE_v}{dF} = \frac{250Fa^3}{3EI}$$

- d) To find the rotation use a dummy couple at B. The moment distribution has to be adjusted for this additional couple at B. Assume an anti clock wise couple in order to find a positive rotation according to the definitions of positive rotations in the x - z plane:

$$M^{AB}(x) = -\frac{5Fa x}{5a} + \frac{Tx}{5a} = Fx + \frac{Tx}{5a}$$

$$M^{CB}(x) = -\frac{5Fa x}{5a} = Fx$$

The rotation at B thus becomes:

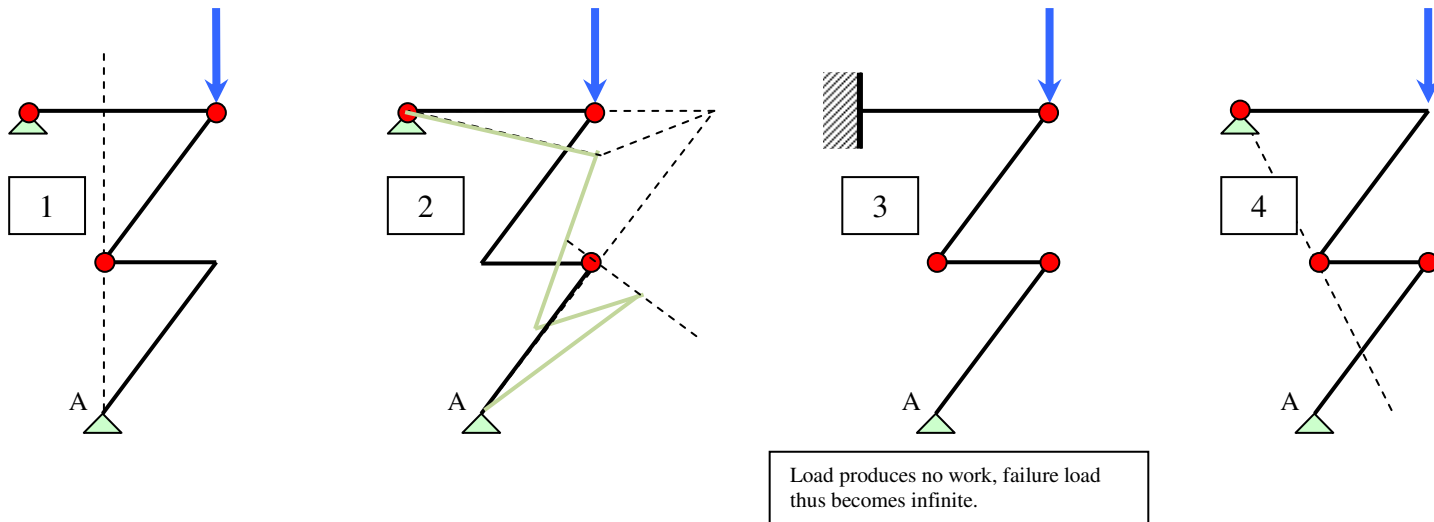
$$\begin{aligned} \varphi_B = \frac{dE_v}{dT} &= \frac{d}{dT} \left[\int_{x=0}^{x=5a} \frac{M^{AB}(x)^2}{2EI} dx + \int_{x=0}^{x=5a} \frac{M^{CB}(x)^2}{2EI} dx \right] = \\ &= \frac{5Ta}{3EI} - \frac{25Fa^2}{3EI} \end{aligned}$$

We are only interested in the rotation due to the actual load. For a zero dummy couple T we obtain the required answer:

$$\varphi_B = -\frac{25Fa^2}{3EI}$$

Problem 3

The structure is two-fold statically indeterminate. We therefore need three hinges for a (plastic) mechanism. There are four possible positions for hinges. This results in four possible mechanisms to investigate. In only three cases the load can produce work which results in three mechanisms which have to be investigated. Small sketches of these mechanisms are shown below.



Elaborate each possible mechanism:

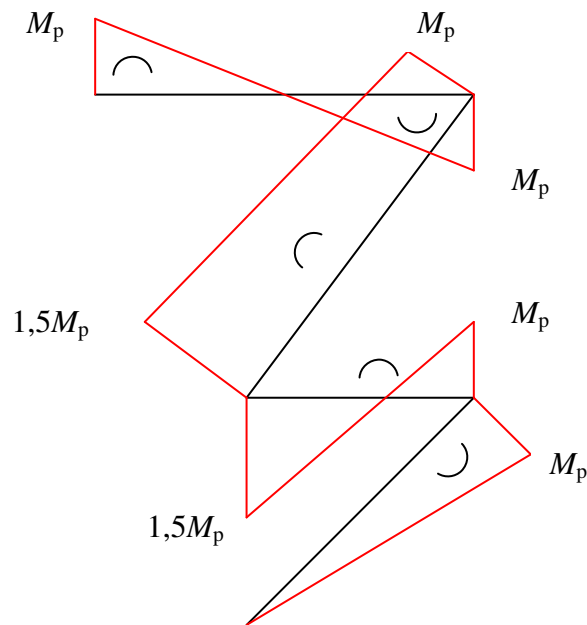
1. Show clearly the kinematics of each bar with respect to all the others,
2. Add the correct direction of all moments at the plastic hinges,
3. Present a correct virtual work equation.

If the kinematics of a mechanism is incorrect no credits will be given to the solution of this mechanism since it is a vital part of the solution strategy and therefore an essential learning outcome to assess.

$$\begin{aligned}
 1: \quad F_p &= \frac{17M_p}{9a} = 1,889 \frac{M_p}{a} \\
 2: \quad F_p &= \frac{37M_p}{30a} = 1,233 \frac{M_p}{a} \\
 4: \quad F_p &= \frac{23M_p}{15a} = 1,533 \frac{M_p}{a}
 \end{aligned}$$

Mechanism 2 leads to the lowest failure load and is the failure mechanism.

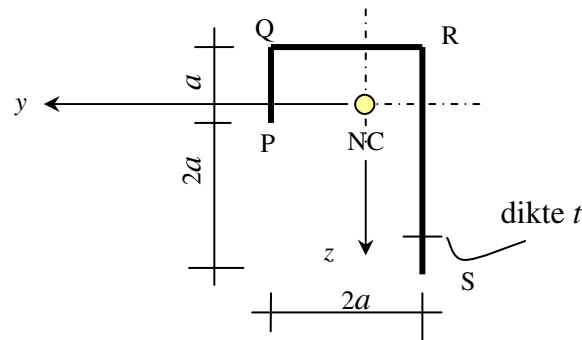
The moment distribution can be drawn almost completely without calculations. Only the moment at D is yet unknown. First find the support reactions and then compute the moment at D. The resulting moment is smaller than the strength $2M_p$ at D so the results satisfy Prager's uniqueness theorem.



If the moment distribution at no point exceeds the strength of the structure for the mechanism with the smallest failure or collapse load then this mechanism is the collapse mechanism and the load found is the collapse load.

Problem 4

- a) The position of the NC can be found e.g. with respect to the upper right corner R with:



$$y_{NC} = \frac{(t \times a \times 2 \times a + t \times 2 \times a \times a)}{(6 \times t \times a)} = \frac{2}{3}a = 120 \text{ mm}$$

$$z_{NC} = \frac{(t \times a \times \frac{1}{2}a + t \times 3 \times a \times \frac{3}{2}a)}{(6 \times t \times a)} = \frac{5}{6}a = 150 \text{ mm}$$

The cross sectional properties become:

$$EI_{yy} = E \times (ta \times (\frac{4}{3}a)^2 + \frac{1}{12}t \times (2a)^3 + 2ta \times (\frac{1}{3}a)^2 + 3ta \times (\frac{2}{3}a)^2) = 4ta^3 \times E$$

$$EI_{zz} = E \times (\frac{1}{12}ta^3 + ta \times (\frac{1}{3}a)^2 + 2ta \times (\frac{5}{6}a)^2 + \frac{1}{12}t \times (3a)^3 + 3ta \times (\frac{2}{3}a)^2) = \frac{31ta^3}{6} \times E$$

$$EI_{yz} = E \times (ta \times (\frac{4}{3}a) \times (-\frac{1}{3}a) + 2at \times (\frac{1}{3}a) \times (-\frac{5}{6}a) + 3at \times (-\frac{2}{3}a) \times (\frac{2}{3}a)) = -\frac{7ta^3}{3} \times E$$

- b) The moment at the cross section is:

$$M = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}Fl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^8 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

The curvature can be found with:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

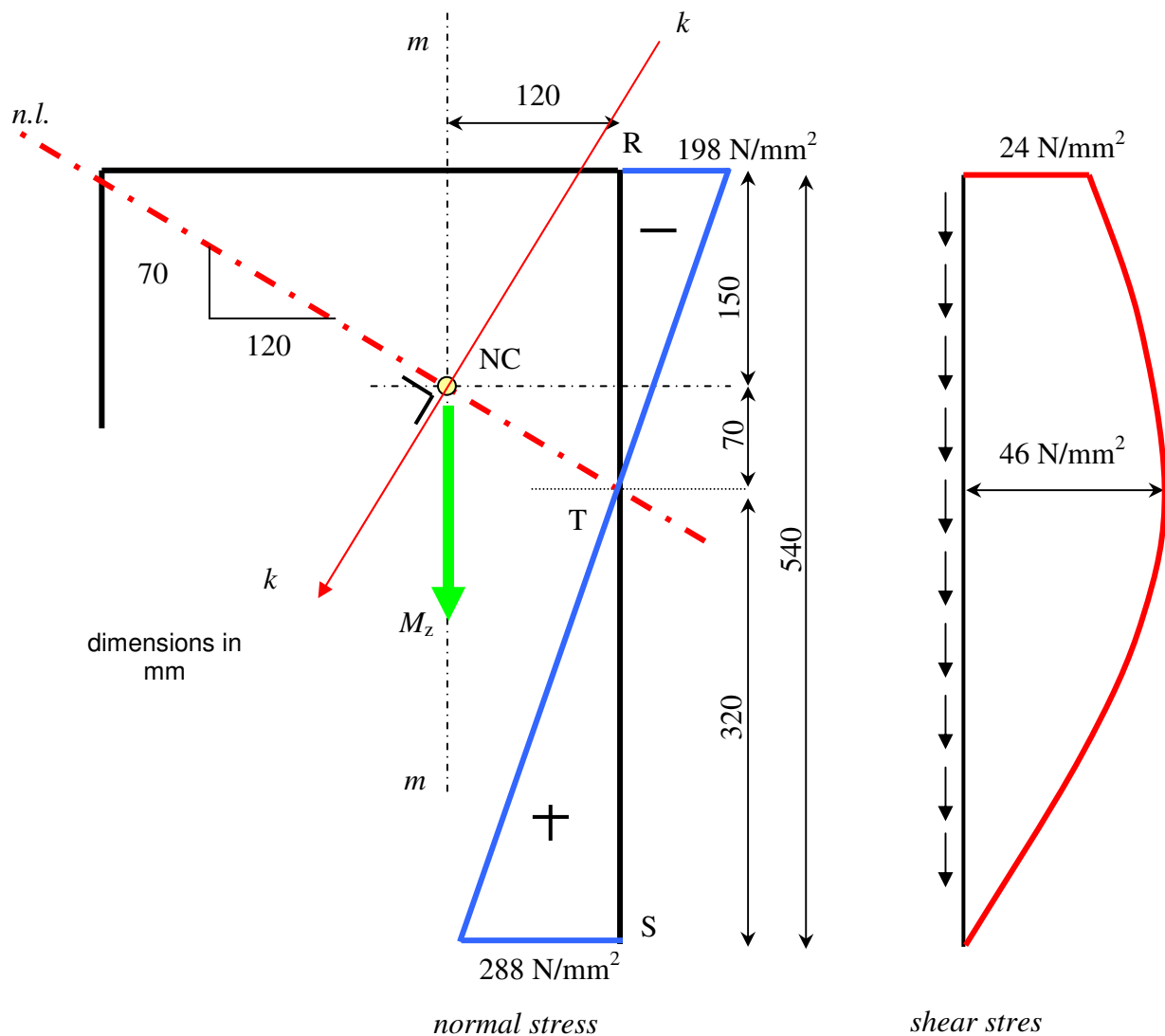
Which results in:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^8 \end{bmatrix} = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 23328 \times 10^4 & -13608 \times 10^4 \\ -13608 \times 10^4 & 30132 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Elaborating yields to:

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2628 \\ 0,4506 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

The plane of loading *m-m* and plane of curvature *k-k* are shown in the graph on the next page.



- c) The equation of the neutral axis becomes:

$$\kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0$$

Since no normal force acts at the cross section, the n.a. runs through the NC and intersects the coordinate system at $y = -120$ mm and $z = 70$ mm. This is also shown in the figure above. The n.a. can be simplified to:

$$70y + 120z = 0$$

- d) The normal stress can be found with:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\kappa_y \times y + \kappa_z \times z)$$

The stress distribution is in plane. For the part RS the stress distribution can be visualised with a straight line. To obtain this line stresses have to be computed at R and S only.

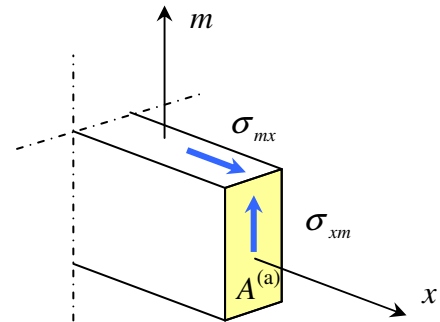
point	y	z	Stress [N/mm ²]
R	-120	-150	-198,25
S	-120	390	288,37

e) The shear stress distribution is parabolic if the normal stress is linear. The maximum shear stress will occur at the points of intersection of the neutral axis and the cross section. To find the distribution of the shear stresses for RS the following three points have to be taken into consideration:

- S, shear stress is zero by definition
- T, maximum shear stress, compute this
- R to be computed

The cross section is unsymmetrical. The computations have to be executed with the general solution strategy:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M}V; \quad \sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$



In this R_M is the resultant force at the sliding element $A^{(a)}$ resulting from the the normal stress distribution due to bending only. The moment and shear in this expression are the resulting moment and shear in the cross section:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 200 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} = 200 \times 10^3 \text{ N}$$

Both moment and shear are positive and act in the same plane of loading $m-m$. The resulting shear stress will have a direction which is downwards which makes sense due to the positive direction of the shear force on a positive section.

Starting with point T we find:

$$\sigma_{xm} = -\frac{\frac{1}{2} \times 288,366 \times 320 \times 10}{10 \times 200 \times 10^6} \times 200 \times 10^3 = -46 \text{ N/mm}^2$$

For the sliding element used a positive answer results in a shear stress which is upwards. So the result is in line with the expected direction of the shear stress.

For point R we find:

$$\sigma_{xm} = -\frac{10 \times (\frac{1}{2} \times 288,366 \times 320 - \frac{1}{2} \times 198,252 \times 220)}{10 \times 200 \times 10^6} \times 200 \times 10^3 = -24 \text{ N/mm}^2$$

The results can also be found in the graph on the previous page.

Schriftelijk tentamen	CTB3330 ConstructieMechanica 4
Totaal aantal pagina's	8 pagina's excl voorblad
Datum en tijd	11-04-2016 van 09:00-12:00 uur
Verantwoordelijk docent	J.W. (Hans) Welleman

Werk iedere opgave afzonderlijk uit op het daarvoor bestemde vel papier

Opgaven (in te vullen door examinerator)

Totaal aantal tentamenopgaven: 4, allen met open vragen

☐ **alle opgaven tellen even zwaar**

☒ **de opgaven hebben verschillende weging** (*het gewicht is in tijd weergegeven*)

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examinerator)

Niet toegestaan:

- Mobiele telefoon, smart Phone of apparaten met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met rode pen of met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan: (aanvinken met kruisje)

☐ **boeken** ☐ **aantekeningen** ☐ **woordenboeken** ☐ **dictaten**

☐ **formulebladen (zie ook onder aanvullende informatie)** ☒ **rekenmachines** ☐ **computer**

☒ **grafische rekenmachine** ☒ **tekenmaterialen waaronder een passer**

Aanvullende informatie (eventueel in te vullen door examinerator)

Voor een vlotte verwerking bij het nakijken is het essentieel dat iedere opgave op een apart vel papier wordt beantwoord. Ga dus **niet** op het zelfde papier door met een volgende opgave.

Uiterlijke datum nakijken tentamen: (de uiterlijke nakijktermijn is 15 werkdagen)

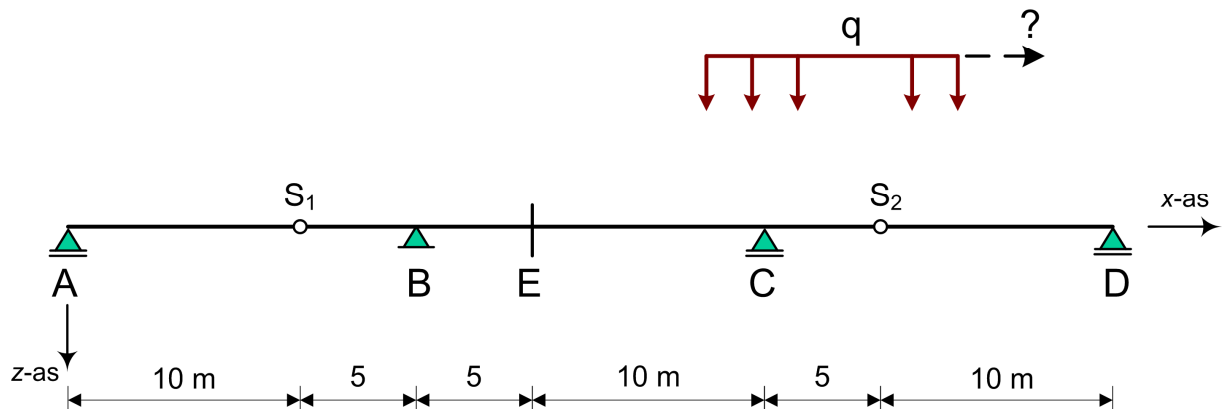


Elk vermoeden van fraude wordt
gemeld bij de examencommissie.

Mobiel UIT

OPGAVE 1 : Invloedslijnen**(ca 40 min)**

Hieronder is een liggerconstructie gegeven. De ligger heeft twee scharnieren S1 en S2.



Figuur 1 : Scharnierligger

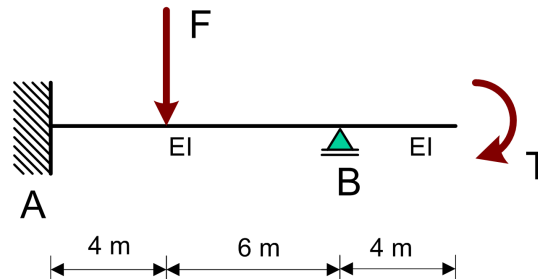
Vragen:

- Construeer de invloedslijn voor het moment in B.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct links van B.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct rechts van B.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht in E.
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in C.
- Schets de invloedslijn voor de zakking van scharnier S1.
- Schets de invloedslijn voor de hoekverdraaiing van C.
- Waar moet een gelijkmatig verdeelde belasting q van 5 kN/m worden geplaatst opdat het moment in B maximaal is en hoe groot is dit maximale moment ?

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

OPGAVE 2 : Arbeid en energie**(ca 50 min)**

Van de onderstaande ligger wordt gevraagd de krachtsverdeling te bepalen met een arbeid en energiemethode. De totale belasting bestaat uit een puntlast F en een koppel T .



Gegeven: $F = 125 \text{ kN}$; $T = 80 \text{ kNm}$; $EI = 15000 \text{ kNm}^2$

Figuur 2 : Ingekleemde ligger

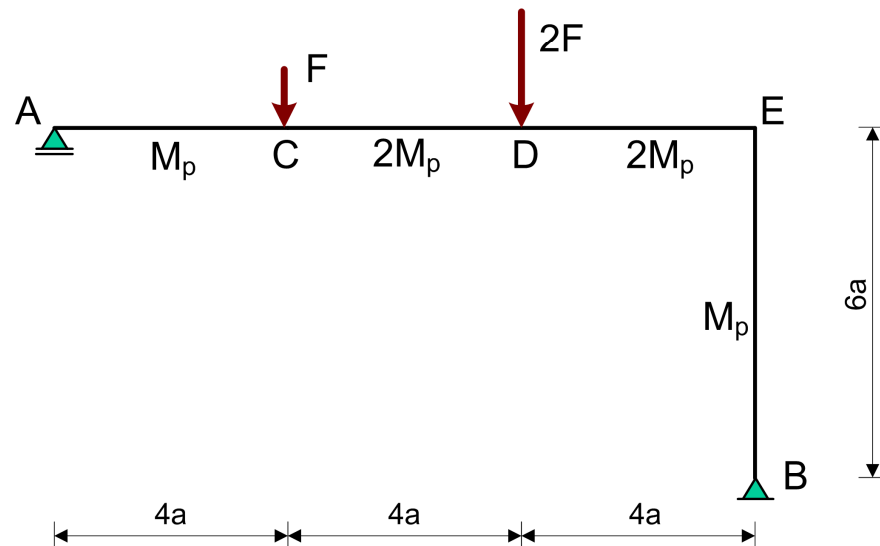
Vragen:

- Beschrijf kort hoe met behulp van de wet van Castigliano de krachtsverdeling in de constructie kan worden bepaald.
- Werk uw stappen op papier uit tot de noodzakelijke vergelijking(en)/functie(s) voor verdere uitwerking. Ondersteun dit deel zo nodig met schetsjes zodat duidelijk is hoe u aan uw vergelijkingen/functies komt en geef daarbij duidelijk aan wat uw positieve definities zijn voor de onbekende(n).
- Los de onbekende(n) op met de door u opgestelde vergelijking(en).
- Teken de momentenlijn voor de gehele constructie en geef daarbij duidelijk de vervormingstekens aan en zet op karakteristieke punten de getalswaarden erbij.

OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 40 min)**

Hieronder is een geknikte constructie ACDEB getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald.

LET OP: De staafdelen hebben een verschillende sterkte zoals in de figuur is aangegeven.



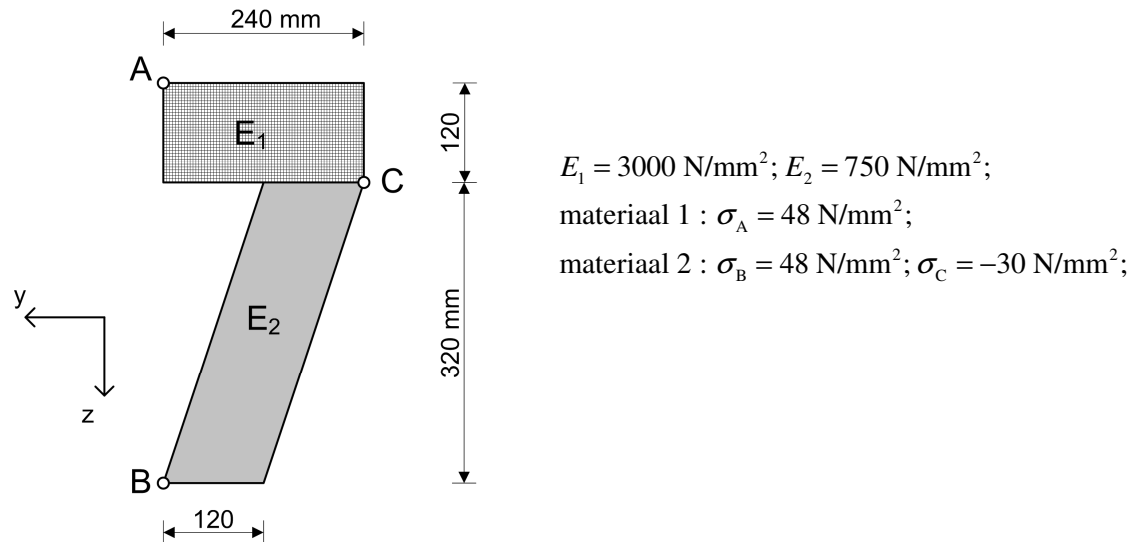
Figuur 3 : Geknikte constructie

Vragen :

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en geef deze met schetsjes weer.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.
- Wat houdt de eenduidigheidsstelling van Prager in?

OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 50 min)**

Van een niet-symmetrische en inhomogene doorsnede, opgebouwd uit twee star aan elkaar verbonden materialen, zijn in de punten A (materiaal 1), B (materiaal 2) en C (materiaal 2) de normaalspanningen bekend. Materiaal 1 heeft een elasticiteitsmodulus E_1 en materiaal 2 heeft een elasticiteitsmodulus E_2 . Een eventuele axiale belasting grijpt aan in het normaalkrachten centrum en een mogelijke dwarskracht grijpt aan in het dwarskrachten centrum.

**Figuur 4** : Inhomogene en niet-symmetrische doorsnede*Vragen :*

- Een collega van u beweert dat gezien de gegeven normaalspanningsverdeling, deze doorsnede alleen op buiging in het y - x -vlak wordt belast. Wat is uw inhoudelijke reactie op deze bewering?
- Bepaal van deze doorsnede de doorsnedegrootheden en geef de constitutieve relatie op doorsnede niveau voor deze doorsnede. Ter controle:
 $|EI_{yy}| = 4838400 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$; $|EI_{yz}| = 921600 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$; $|EI_{zz}| = 13948800 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$
- Geef kort aan hoe u de onbekende snedekrachten m.b.t. buiging en extensie in de doorsnede kunt bepalen op basis van de bekende gegevens.
- Bepaal de onbekende krachtsgr grootheden op de door u beschreven wijze. Maak bij voorkeur gebruik van de GR. Mocht u een handberekening prefereren dan mag u gebruik maken van het gegeven dat de normaalrek in de staaf-as gelijk is aan $-3/500$.
- Geef in een schets aan waar de neutrale lijn loopt en onder welke helling.
- Schets de vorm van de kern en bepaal het meest linker kernpunt.
- Hoe bepaalt u de schuifstroom in de verbinding tussen materiaal 1 en 2? Geef in het kort de relevante stappen aan. (ga niet rekenen!)

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{EI_{yy} - EI_{zz}}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

$$q_y^* = \frac{EI_{yy}EI_{zz}q_y - EI_{yy}EI_{yz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2}$$

$$q_z^* = \frac{-EI_{yz}EI_{zz}q_y + EI_{yy}EI_{zz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

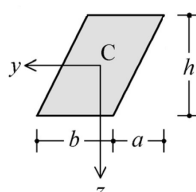
Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:



$$I_{yy} = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) bh$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_{yz} = \frac{1}{12} abh^2$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \varepsilon$$

$$M = EI \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

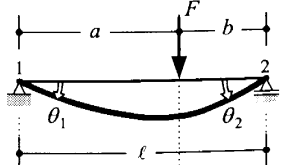
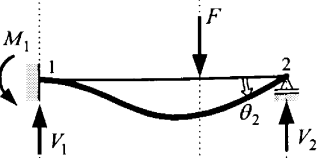
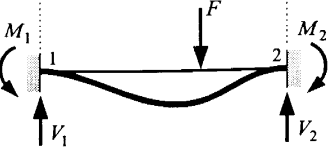
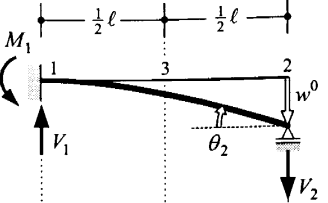
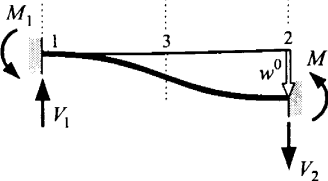
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; V_1 = \frac{5}{8} q\ell; V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

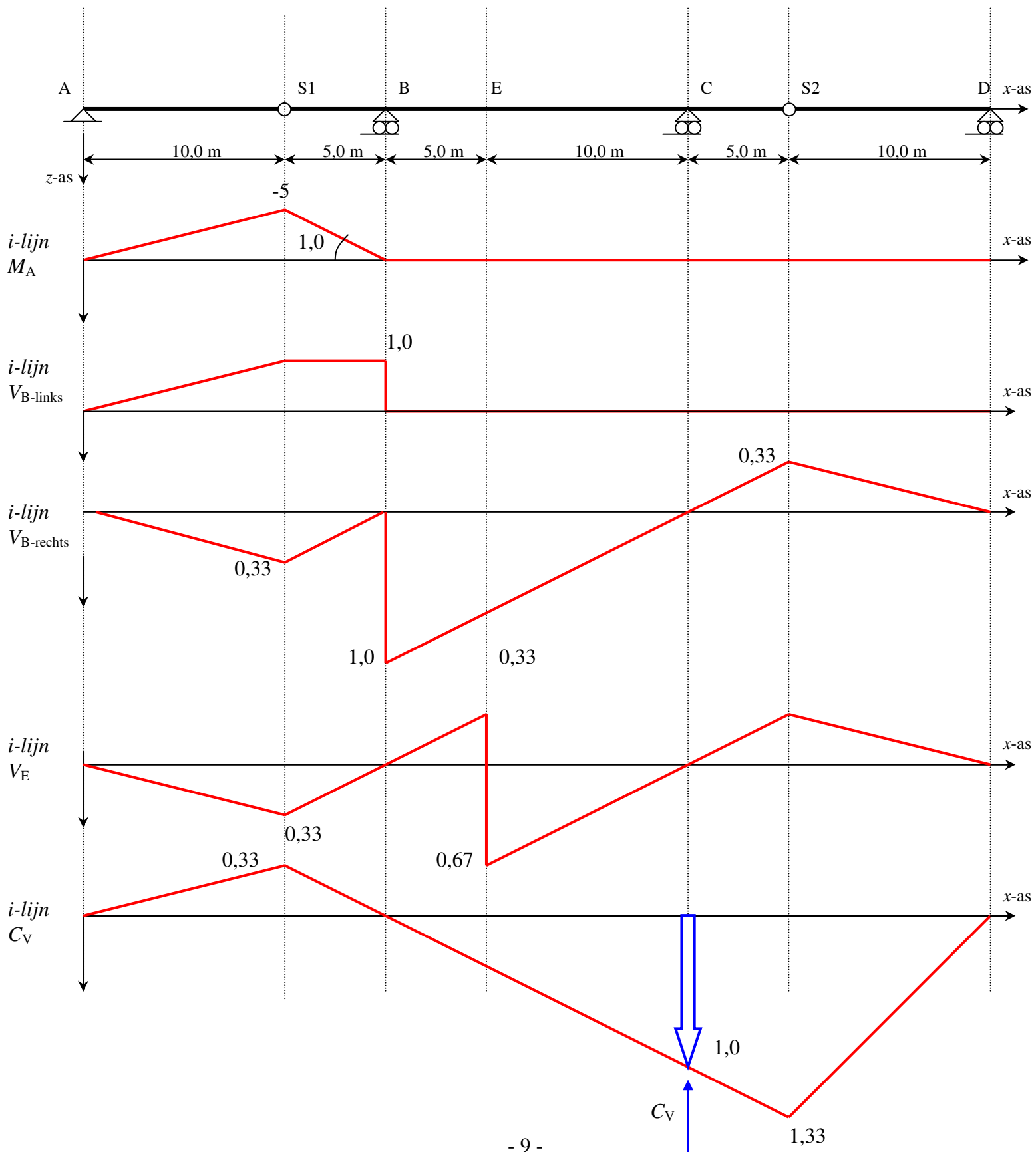
drie bij-de handjes

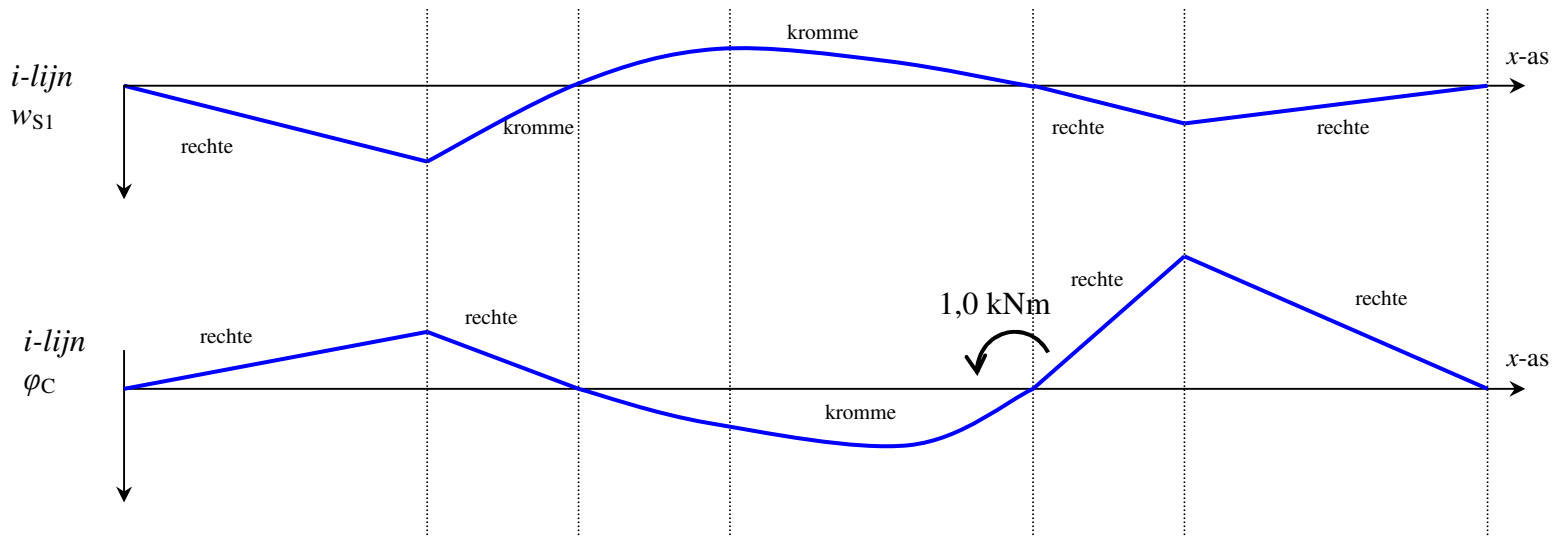
zettingen

BEKNOPTE ANTWOORDEN

Opgave 1

Hieronder zijn de gevraagde invloedslijnen a) t/m e) geconstrueerd en f) en g) geschetst. De geldende afspraken voor positieve krachtsgrootheden zijn aangehouden.





- h) De gelijkmatige belasting moet staan op het deel AB waarmee het maximale moment in A gelijk wordt aan : $M_A = \frac{1}{2} \times 15 \times (-5,0) \times 5 = -187,5 \text{ kNm}$.

Opgave 2

- a) Enkelvoudig statisch onbepaalde constructie. Kies een statisch onbepaalde waar een vormveranderingsvoorwaarde bij hoort met de eis dat een verplaatsing of hoekverdraaiing bekend is (nul). Werk de vormveranderingsvoorwaarde uit met de 2^e wet van Castigliano.
- b) Voor de vormveranderingsenergie is het verloop van de momentenverdeling nodig als functie van x :

$$M_1(x) = -F(4-x) \quad 0 \leq x \leq 4,0$$

$$M_2(x) = B_V(10-x) - T \quad 0 \leq x \leq 10,0$$

$$M_3(x) = -T \quad 10 \leq x \leq 14,0$$

$$E_v = \int_0^{4,0} \frac{(M_1(x) + M_2(x))^2}{2EI} dx + \int_{4,0}^{10,0} \frac{M_2^2(x)}{2EI} dx + \int_{10}^{14} \frac{M_3^2(x)}{2EI} dx$$

De vormveranderingsvoorwaarde luidt:

$$w_B = 0 \Rightarrow w_B = \frac{dE_v}{dB_V}$$

Aangezien het deel van de momentenverdeling van 10,0 tot 14,0 m niet afhangt van de oplegreactie in B kan dit deel buiten beschouwing worden gelaten.

- c) Pas Castigliano toe en hiervoor zijn alleen de momentenverdelingen van AB nodig:

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{d}{dB_V} E_v = \int_0^4 \frac{d}{dB_V} \left[\frac{(-4F + Fx + 10B_V - B_V x - T)^2}{2EI} \right] dx + \int_4^{10} \frac{d}{dB_V} \left[\frac{(10B_V - B_V x - T)^2}{2EI} \right] dx \\ &= \int_0^4 \frac{(-4F + Fx + 10B_V - B_V x - T)(10 - x)}{EI} dx + \int_4^{10} \frac{(10B_V - B_V x - T)(10 - x)}{EI} dx = \\ &= \int_0^4 \frac{(-40F + 14Fx - Fx^2 + 100B_V - 20B_V x + B_V x^2 - 10T + Tx)}{EI} dx + \\ &\quad \int_4^{10} \frac{(100B_V - 20B_V x + B_V x^2 - 10T + Tx)}{EI} dx = \\ &= -\frac{26F}{5625} + \frac{B_V}{45} - \frac{T}{300} = 0 \end{aligned}$$

Invullen van $F = 125$ kN en $T = 80$ kNm levert:

$$B_V = 38 \text{ kN} \uparrow$$

- d) Momentenlijn moet foutloos zijn qua vorm. Inklemmingsmoment is 200 kNm. Onder de puntlast een momentwaarde van 148 kNm en boven het steunpunt 80 kNm.

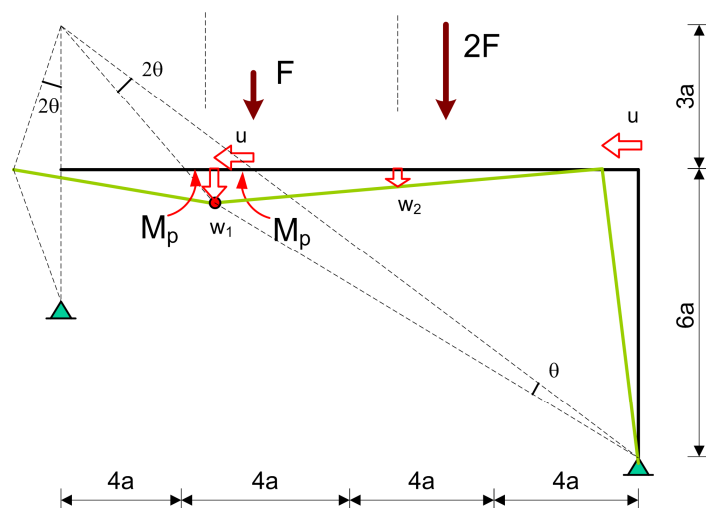
Opgave 3

- a) De constructie is statisch bepaald (!) waardoor er maximaal 1 scharnier nodig is om een mechanisme te creëren. Dit scharnier kan op 3 plaatsen ontstaan waarmee er 3 combinaties mogelijk zijn.

Scharnieren in C, D of E. In het geval van deze laatste mogelijkheid zal de belasting geen arbeid verrichten waarmee de bezwijklast oneindig zal zijn en daarmee zeker niet de laagste is. Alleen scharnieren in C of D hoeven verder te worden uitgewerkt.

- b) Het mechanisme moet netjes worden uitgewerkt.
1. Daarbij moet eenduidig worden aangegeven hoeveel iedere staaf in verhouding tot de andere staven verdraait en
 2. de juiste richting van de plastische momenten worden aangegeven.
 3. en een correcte virtuele arbeidsvergelijking worden opgesteld.

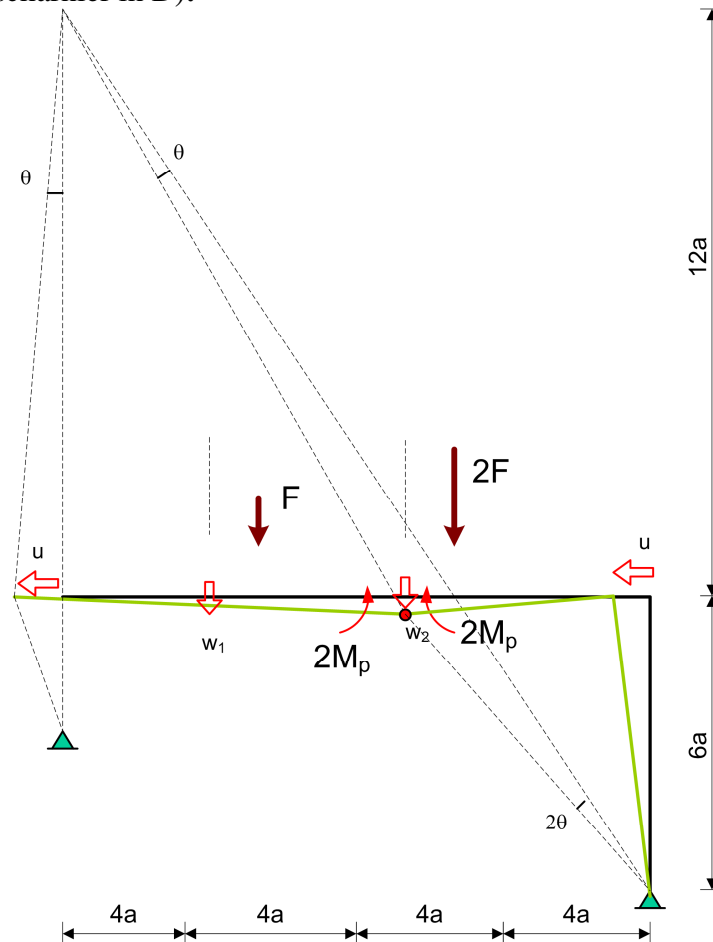
Als de kinematica van het mechanisme onjuist is valt dit mechanisme buiten de beoordeling, kortom dit is een essentieel leerdoel. Tip: gebruik de u en de w om alle hoeken echt te vinden. Gokken wordt niet gewaardeerd.

Mechanisme 1 (scharnier in C):

$$\delta A = -M_p 2\delta\theta - M_p \delta\theta + F \times 8a \times \delta\theta + 2F \times 4a \times \delta\theta = 0$$

$$F_p = \frac{3M_p}{16a} = 0,1875 \frac{M_p}{a}$$

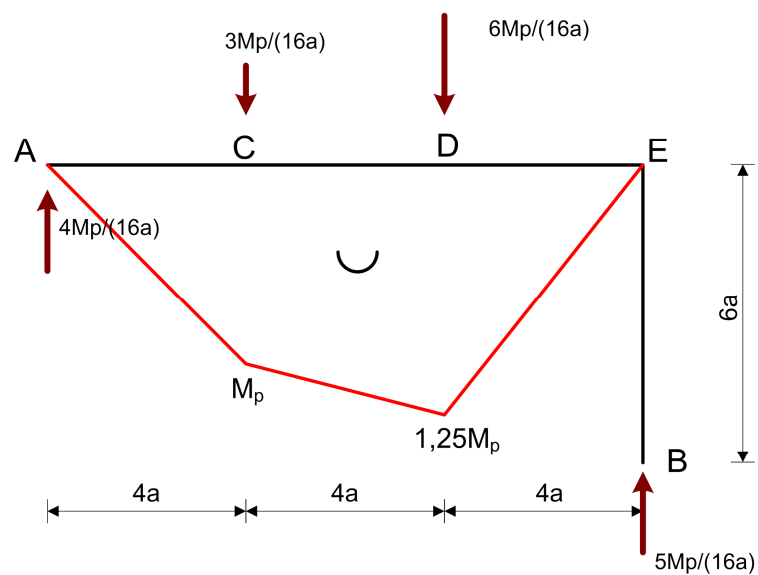
MAATGEVEND

Mechanisme 2 (scharnier in D):

$$\delta A = -2M_p \times \delta\theta - 2M_p \times 2\delta\theta + F \times 4a \times \delta\theta + 2F \times 4a \times 2\delta\theta = 0$$

$$F_p = \frac{3M_p}{10a} = 0,3 \frac{M_p}{a}$$

- c) Van het maatgevende mechanisme 1 is hieronder de momentenlijn getekend. Het moment in D wordt 1,25Mp hetgeen kleiner is dan de sterkte van 2Mp in D.



Merk op dat voor deze zeer eenvoudige constructie de horizontale oplegreactie in B nul moet zijn.

- d) Volgens de eenduidigheidsstelling van Prager mag nergens in de constructie de sterkte overschreden worden. Dit kan worden gecontroleerd door de momentenlijn te tekenen voor het maatgevende mechanisme. De momentenlijn laat zien dat nergens in de constructie de sterkte wordt overschreden. Er wordt voldaan het eenduidigheids criterium van Prager en daarmee is er (in het algemeen) zekerheid dat het aangewezen mechanisme ook echt het bezwijkmechanisme is.

Opgave 4

- a) Hoewel de normaalspanningen in A en B wel gelijk zijn, moeten de rekken ongelijk zijn. Immers de elasticiteitsmodulus is in A ongelijk aan die in B en de doorsnede is niet-symmetrisch. De neutrale lijn zal niet evenwijdig aan AB lopen en het krommingsvlak dat loodrecht staat op de neutrale lijn verloopt daarmee niet horizontaal. Het belastingsvlak $m-m$ kan een kleine hoek maken met het vlak $k-k$ waarin de ligger kromt maar het zou welhaast louter toeval zijn als in deze situatie het belastingvlak dan wel precies horizontaal verloopt (alleen een M_y). Alleen dan heeft de collega gelijk. Zou dit zo zijn dan moet uw collega welhaast helderziend zijn. Het ligt meer voor de hand om op basis van het niet-symmetrisch en inhomogeen zijn van de doorsnede de verwachting uit te spreken dat de doorsnede zowel op normaalkracht als op buiging wordt belast waarbij de buiging uit twee componenten bestaat, die in het $x-y$ -vlak en die in het $x-z$ -vlak.
- b) De axiale stijfheid kan worden bepaald met:

$$EA = E_1(240 \times 120) + E_2(120 \times 320) = 1152 \times 10^5 \text{ Nmm}$$

Het normaalkrachtencentrum van deze doorsnede ligt ten op zichte van de linker bovenhoek op:

$$y_{\text{NC}} = \frac{E_1(220 \times 120 \times 120) + E_2(120 \times 320 \times 120)}{EA} = 120 \text{ mm}$$

$$z_{\text{NC}} = \frac{E_1(220 \times 120 \times 60) + E_2(120 \times 320 \times 280)}{EA} = 115 \text{ mm}$$

De buigstijfheidstensor kan hiermee worden bepaald:

$$EI_{yy} = 3000 \left(\frac{1}{12} \times 120 \times 240^3 \right) +$$

$$750 \left(\frac{1}{12} \times 2 \times 120^2 \times 120 \times 320 \right) = 4838400 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = 750 \left(\frac{1}{12} \times 120^2 \times 320^2 \right) = 921600 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = 3000 \left(\frac{1}{12} \times 240 \times 120^3 + 240 \times 120 \times (55)^2 \right) +$$

$$750 \left(\frac{1}{12} \times 120 \times 320^3 + 120 \times 320 \times (-165)^2 \right) = 13948800 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

De constitutieve relatie is hiermee:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1152 & & \\ & 4838400 & 921600 \\ & 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

- c) Voor drie punten zijn de normaalspanningen gegeven. Dit levert drie vergelijkingen op met de drie onbekende vervormingsparameters van de doorsnede:

$$\sigma_A = E_1(\varepsilon + \kappa_y y_A + \kappa_z z_A)$$

$$\sigma_B = E_2(\varepsilon + \kappa_y y_B + \kappa_z z_B)$$

$$\sigma_C = E_2(\varepsilon + \kappa_y y_C + \kappa_z z_C)$$

Deze zijn daarmee oplosbaar en vervolgens kan met de constitutieve vergelijking van de doorsnede de snedekrachten worden bepaald:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI_{yy} & EI_{yz} \\ & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

- d) Oplossen levert:

$$48 = 3000\varepsilon + 360000\kappa_y - 345000\kappa_z$$

$$48 = 750\varepsilon + 90000\kappa_y + 243750\kappa_z$$

$$-30 = 750\varepsilon - 90000\kappa_y + 3750\kappa_z$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 48 \\ 48 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & 360000 & -345000 \\ 750 & 90000 & 243750 \\ 750 & -90000 & 3750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

volgens de GR:

$$\varepsilon = -\frac{3}{500}; \quad \kappa_y = \frac{19}{66000}; \quad \kappa_z = \frac{3}{27500}; \quad (-0,006; 2,878 \times 10^{-4}; 1,090 \times 10^{-4})$$

De snedekrachten volgen nu uit:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1152 & & \\ & 4838400 & 921600 \\ & 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/500 \\ 19/66000 \\ 3/27500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -691,2 \times 10^3 \text{ N} \\ 149,34 \times 10^6 \text{ Nmm} \\ 178,70 \times 10^6 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

Buiging treedt dus niet op in het x-y-vlak. De dwarskracht kan niet worden bepaald aangezien hier de verdere gegevens voor ontbreken.

- e) De neutrale lijn heeft als vergelijking:

$$95y + 36z = 1980$$

De *nl* snijdt de y-as voor $z = 0$ in $y = 20,8$ mm en de z-as voor $y = 0$ in $z = 55$ mm en gaat dus beslist niet door het NC. Het krommingsvlak staat loodrecht op de *n.l.* en het belastingsvlak valt niet samen met een van de assen en ook niet met het krommingsvlak vanwege het niet-symmetrisch en inhomogene karakter van de doorsnede.

- f) De kern is een vijfhoek aangezien er 5 raaklijnen aan de doorsnede zijn te construeren die kunnen samenvallen met de ligging van de nl die behoort tot een van de hoekpunten van de kern (krachtpunt voor de ligging van de nl). De rechte rand van de kern geeft alle mogelijke raaklijnen (neutrale lijnen) die juist raken aan de doorsnede in een van de buitenhoeken van de doorsnede.

Het linker kernpunt behoort bij een raaklijn die juist aan de rechterzijde van de doorsnede raakt.

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1152} \begin{bmatrix} 4838400 & 921600 \\ 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/(-120) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,0 \\ 6,67 \end{bmatrix}$$

- g) Voor de schuifstroom t.g.v. een dwarskracht V in de doorsnede is de normaalspanning nodig op een afgeschoven deel (materiaal 1 of materiaal 2) ten gevolge van alleen het buigend moment. Dat betekent:

- Bepaal de normaalspanning op het afgeschoven deel t.g.v. alleen het buigend moment
- Bepaal de resultante normaalkracht op dit deel met behulp van de gevonden spanningen en
- Bepaal met de algemene formule:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V;$$

de schuifstroom t.g.v. een nog nader te specificeren waarde voor de dwarskracht V .