CTB2210

Constructiemechanica 3

Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"

LET OP! EEN REPRODUCERENDE LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR DE ACADEMISCHE VORMING

Januari 2017
April 2016
April 2013
Januari 2013
Januari 2012
April 2011

Vul dit schema in om een overzicht te hebben van welke onderwerpen van het vak al goed gaan en welke je nog moet oefenen

	Januari 2017		April 2016		April 2013		Januari 2013		Januari 2012		April 2011	
Vraag	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?
1												
2												
3												
4												
5												

Faculteit
Civiele Techniek en
Geowetenschappen

OPGAVE FORMULIER

Schriftelijk tentamen	**CTB2210**
	ConstructieMechanica 3
Totaal aantal pagina's	**9 pagina's excl voorblad**
Datum en tijd	**30-01-2017** van **13:30-16:30** uur
Verantwoordelijk docent	**J.W. (Hans) Welleman**

Alleen het op het uitwerkformulier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenopgaven (in te vullen door examinator)

Totaal aantal tentamenopgaven: 5, allen met open vragen

☐ **alle opgaven tellen even zwaar**

☒ **de opgaven hebben verschillende weging** *(het gewicht is in tijd weergegeven)*

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examinator)

Niet toegestaan:

- Nietje verwijderen
- Mobiele telefoon, smart Phone of apparaten met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met rode pen of met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

☐ **boeken** ☐ **aantekeningen** ☐ **woordenboeken** ☐ **dictaten**

☐ **formulebladen (zie ook onder aanvullende informatie)** ☒ **rekenmachines** ☐ **computer**

☒ **grafische rekenmachine** ☒ **tekenmaterialen waaronder een passer**

Aanvullende informatie (eventueel in te vullen door examinator)

Het antwoordformulier wordt door een scanner ingelezen en verder digitaal verwerkt. Het is dus van het grootste belang binnen de aangegeven ruimte te blijven en duidelijk te schrijven.

Uiterlijke datum nakijken tentamen: (de uiterlijke nakijktermijn is 15 werkdagen)

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

NIETJE NIET LOSHALEN !!

Mobiel UIT en opbergen in tas

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 1: Theorie (ongeveer 40 minuten)

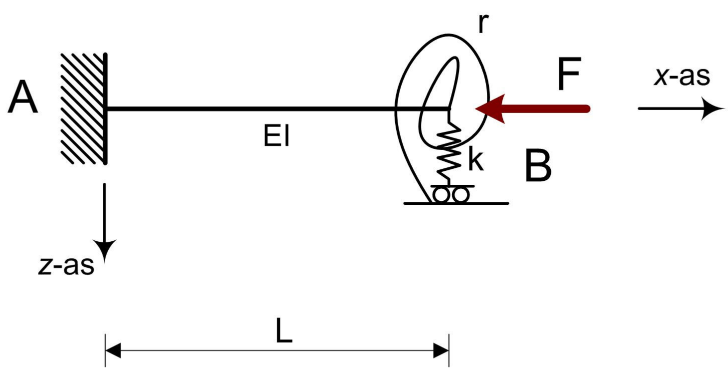
Deze opgave bestaat uit twee onderdelen. Ieder onderdeel betreft een afzonderlijk probleem.

INDIEN ANS : LET OP BIJ DE BEANTWOORDING:

Gebruik uitsluitend het **antwoordformulier** en blijf binnen de aangegeven ruimte. De antwoordbladen gaan door de scanner en het tentamen wordt verder digitaal verwerkt. Alle bladen zijn uniek gekoppeld aan uw naam en kunnen dus niet vervangen worden door nieuwe bladen. **Vraag om assistentie van de surveillanten als u grote problemen ondervindt.**

Onderdeel 1 : Stabiliteit (ongeveer 20 min)

In de onderstaande figuur is een deels ingeklemde ligger gegeven die op druk wordt belast. In A is de ligger ingeklemd en in B verend ondersteund en verend ingeklemd met een translatieveer *k* en een rotatieveer *r*.



Vragen:

a) Geef kort aan uit welke stappen de bepaling van de kniklast bestaat en wat u op voorhand daarbij weet/aanneemt.

b) Stel de bijbehorende vergelijking(en) op en geef aan welke onbekende(n) daarmee kunnen worden bepaald.

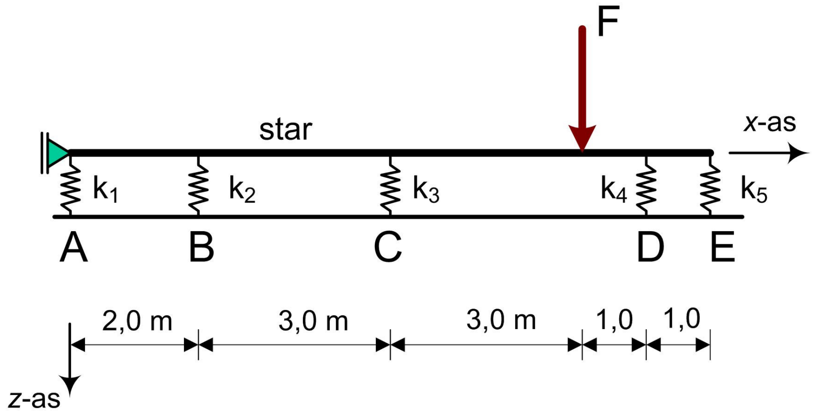
c) Geef een afschatting van de grenzen waarbinnen de kniklast zich moet bevinden voor de gegeven parameters.

Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Onderdeel 2 : Verplaatsingenmethode (ongeveer 20 min)

De onderstaande starre ligger wordt ondersteund met 5 translatieveren. Aan de linker zijde is de ligger opgelegd door middel van een verticale roloplegging. De belasting is aangegeven in de figuur.



Gegeven : $F = 2580$ kN; $k_1 = 100$ kN/m; $k_2 = 2k_1$; $k_3 = 3k_1$; $k_4 = 4k_1$; $k_5 = 5k_1$;

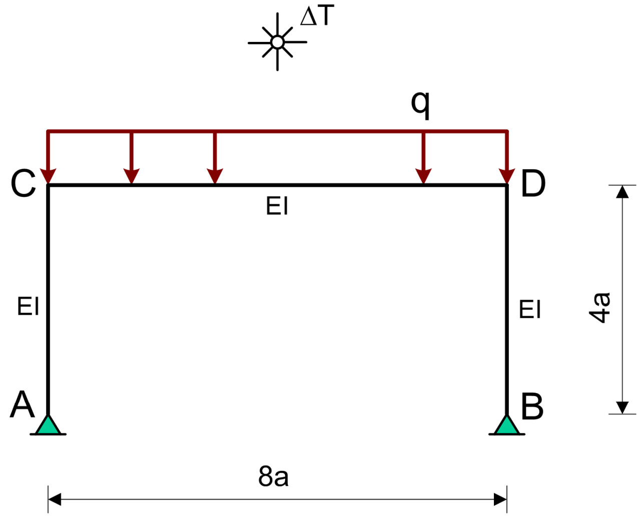
Vragen:

d) Welke onbekende(n) kiest U om de krachtsverdeling in de veren te bepalen met behulp van de verplaatsingenmethode?
e) Stel de noodzakelijke vergelijking(en) op waarmee deze onbekenden kunnen worden opgelost.
f) Los de onbekende(n) op.
g) Bepaal de grootte van de kracht in veer 1 en 5 en geef aan of het hier om een trek of een drukkracht gaat.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 2: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 40 minuten)

De onderstaande spantconstructie wordt aan de buitenzijde opgewarmd. Het spant wordt tevens belast op de bovenregel CD met een gelijkmatig verdeelde belasting q zoals aangegeven in de figuur. Alle staven hebben dezelfde materiaal eigenschappen en doorsnede bxh. De doorsnede is zo geplaatst dat deze op buiging om de sterke as wordt belast. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegeven : $\Delta T = 30^{\mathrm{o}}$; $\alpha = 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$; $q = 8$ kN/m;
$a = 1{,}0$ m; $h = 0{,}6$ m; $EI = 32000$ kNm^2;

Vragen:

a) Bepaal de momentenverdeling t.g.v. **alleen** de gelijkmatig verdeelde belasting q.
b) Teken de momentenlijn voor deze belasting inclusief vervormingstekens en schrijf de waarden op karakteristieke punten erbij.

c) Bepaal de momentenverdeling t.g.v. **alleen** de temperatuursbelasting.
d) Teken de momentenlijn voor deze belasting inclusief vervormingstekens en schrijf de waarden op karakteristieke punten erbij.

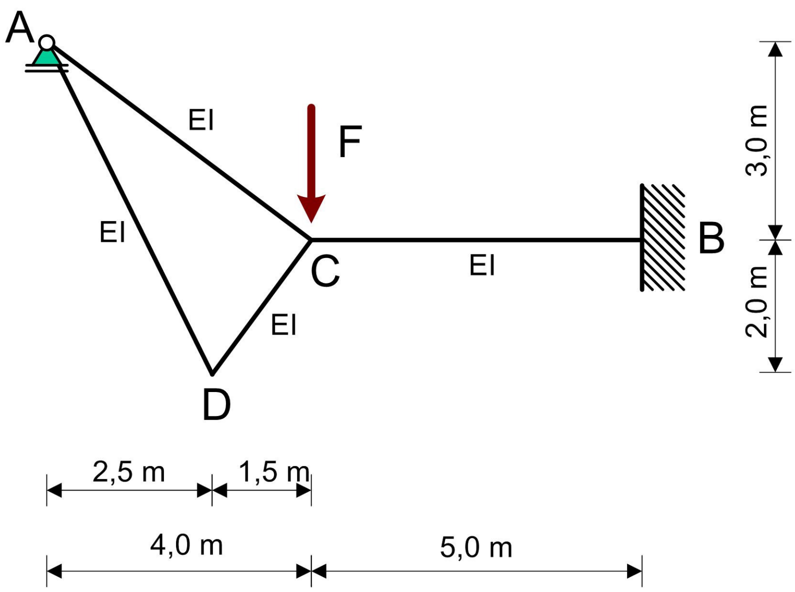
e) Welke uitspraken zijn correct? [markeer indien correct]

O Het moment in C t.g.v. alleen q is afhankelijk van a
O Het moment in C t.g.v. alleen de temperatuurslast is afhankelijk van a
O Het superpositie beginsel geldt niet voor de genoemde belastingen.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 3: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 30 minuten)

De onderstaande statisch onbepaalde constructie wordt belast door de aangegeven puntlast in C. De constructie is in A opgelegd op een rol en in B volledig ingeklemd. Alleen de staafverbinding in A is scharnierend, de rest is star. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegeven : F = 50 kN; EI = 1000 kNm^2;

Vragen:

a) Welke uitspraken zijn correct? [markeer indien correct]

O Het moment in B is de helft van het moment in C van deel CB.
O Het moment in B is twee maal het moment in C van deel CB.
O De invloed van de puntlast zit alleen in de virtuele arbeidsvergelijking.

b) Geef in een schets aan welke onbekende(n) u kiest om de krachtsverdeling te kunnen bepalen.

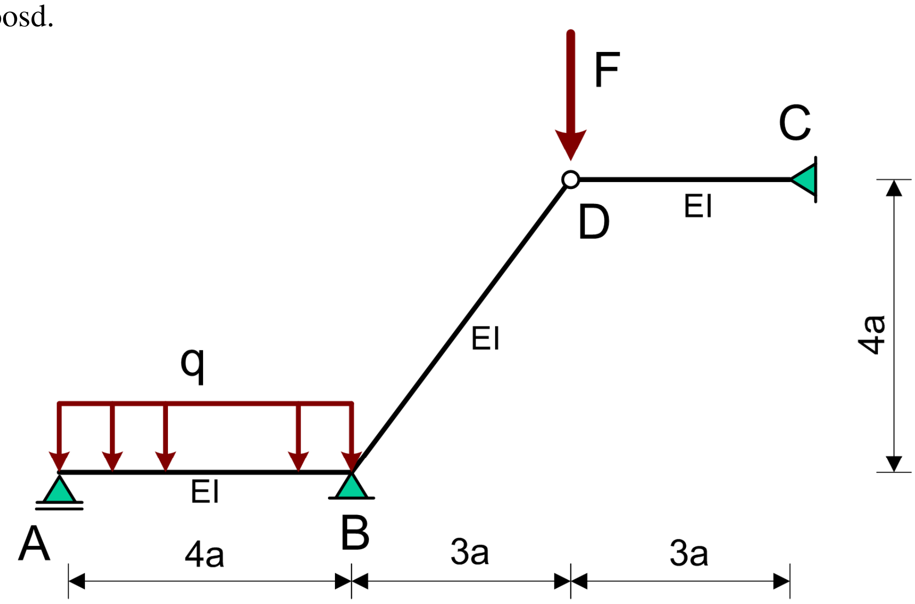
c) Stel de vergelijking(en) op in de door u gekozen onbekenden waarmee u deze kunt oplossen. (**merk op**: los de onbekenden **niet** op, dat mag u thuis doen)

d) Hoe groot is de horizontale verplaatsing in A uitgedrukt in uw onbekende(n)?

==== **Technische Universiteit Delft** ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 4 : Stabiliteit (ongeveer 30 minuten)

De onderstaande constructie bestaat uit een schuine kolom BD die in D gesteund wordt door een horizontale *pendelstaaf* en in B momentvast verbonden is met de ligger AB. Alle buigstijfheden zijn gelijk. De gelijkmatig verdeelde belasting q op veld AB is permanent aanwezig. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegevens: a = 1,0 m; EI = 1000 kNm^2; q = 36 kN/m; F = 100 kN;

Vragen:

a) Teken de knikvorm(en) van deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen mogelijk uitknikken en welke delen alleen buigen.

b) Geef een schets van de rekenmodel(len) om de bijbehorende knikkracht van deze delen te bepalen en bepaal alle noodzakelijke parameters in uw model(len) en geef deze aan in de schets.

c) Bepaal met uw model de maatgevende kniklast voor F, maak zo nodig gebruik van het formuleblad.

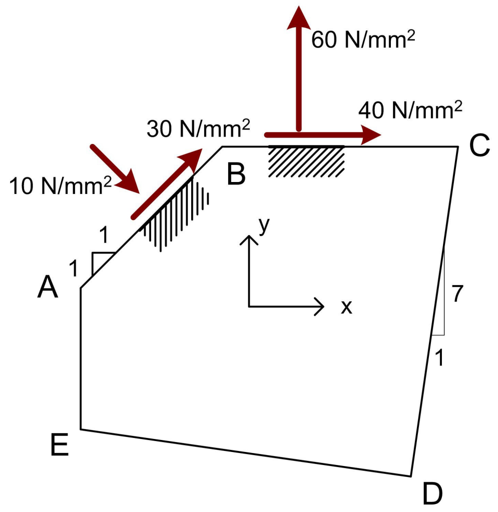
d) Bepaal het 1^e orde moment in B.

e) Bepaal het 2^e orde moment in B (mag een goede afschatting zijn).

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 5 : Elasticiteitstheorie (ongeveer 40 minuten)

Een proefstuk ABCDE verkeert in een homogene isotrope vlakspanningstoestand. Van twee vlakken zijn de normaal en schuifspanning bekend. Deze vlakjes zijn hieronder getekend samen met het assenstelsel dat wordt aangehouden.



Gegeven: $E = 10000\ \text{N/mm}^2; G = 4000\ \text{N/mm}^2; f_y = 140\ \text{N/mm}^2;$

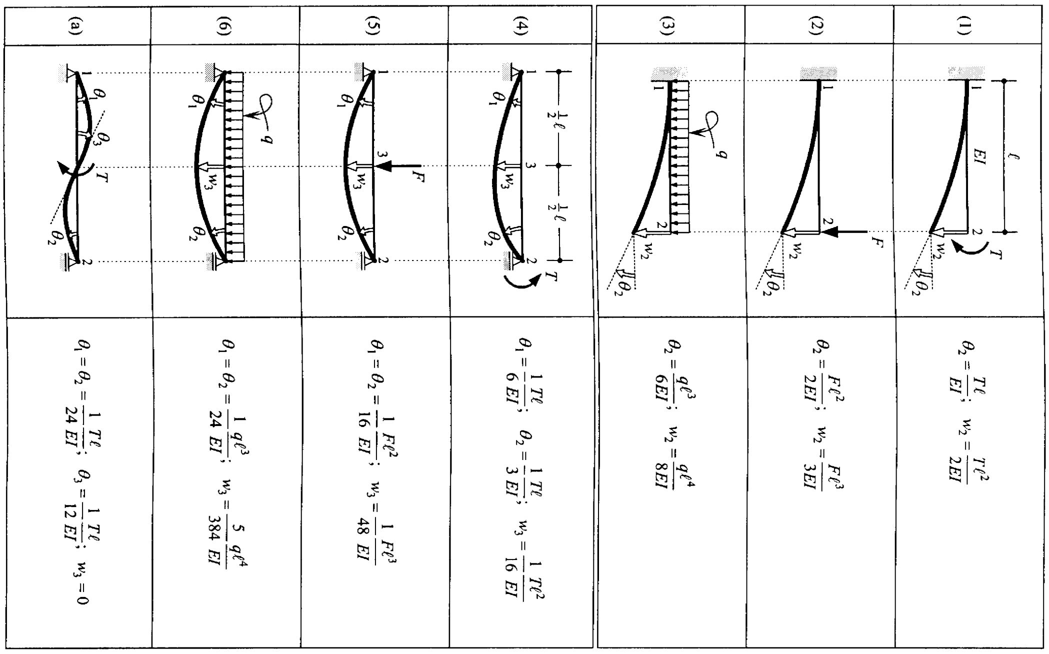
Vragen

a) Welke bewering is niet correct?
   - O Een positieve hoofdspanning 1 en 2 geeft een hogere capaciteit als Tresca wordt gehanteerd i.p.v. von Mises (op basis van een trekproef).
   - O Een positieve hoofdspanning 1 in combinatie met een negatieve hoofdspanning 2 levert een gelijke capaciteit als waarbij beiden positief zijn.
   - O Het Tresca criterium valt precies samen met het von Mises criterium (op basis van een trekproef) indien de hoofdspanningen in absolute zin gelijk zijn aan de vloeispanning.

b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het **richtingencentrum** en de **hoofdrichtingen** en **hoofdspanningen** aan. Bepaal de hoofdspanningen m.b.v. een berekening op basis van de cirkelinformatie.
c) Bepaal met de cirkel van Mohr de spanningen op het vlak AE en DC en teken deze zoals ze in werkelijkheid werken en zet de getalswaarde erbij.
d) Bepaal de rektensor op basis van de gevonden spanningstensor.
e) Teken de cirkel voor Mohr voor de rekken.
f) Bepaal de rek in een vezel evenwijdig aan AB. (mag exact of door deze af te lezen uit de rekcirkel)

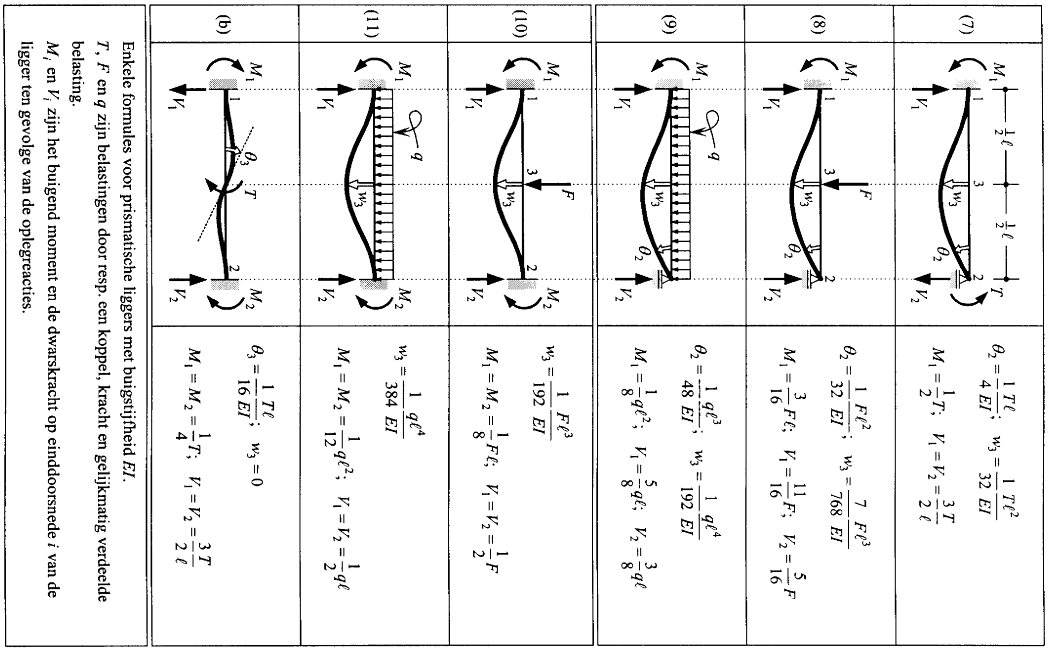
Laatste blad voor de formulebladen

FORMULEBLAD
(scheur dit blad en verder los van het werk)



vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) *vergeet-mij-nietjes*

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) *statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)*



Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

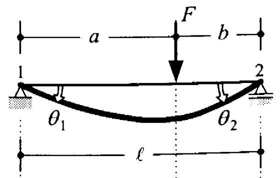
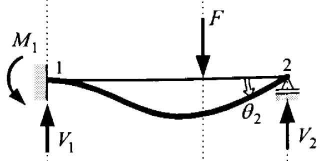
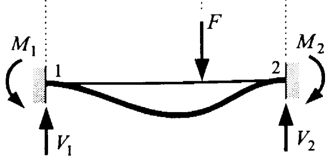
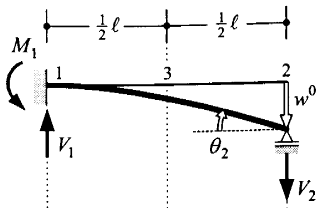
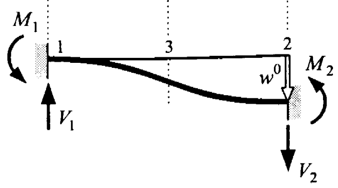
$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \dfrac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{6EI}\left(2\dfrac{a}{\ell} - 3\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \dfrac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{6EI}\left(\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$
(d)		$M_1 = \dfrac{Fb(\ell^2-b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \dfrac{Fb(3\ell^2-b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \dfrac{Fa^2(3\ell-a)}{2\ell^3} = F\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \dfrac{Fa^2b}{4EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{4EI}\left(\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$
(e)		$M_1 = \dfrac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a}{\ell} - 2\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \dfrac{Fb^2(\ell+2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\dfrac{a^2}{\ell^2} + 2\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $M_2 = \dfrac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \dfrac{Fa^2(\ell+2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\dfrac{a^2}{\ell^2} - 2\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$
(f)		$M_1 = \dfrac{3EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \dfrac{3EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \dfrac{9}{8}\dfrac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \dfrac{5}{16}w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \dfrac{6EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \dfrac{12EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_3 = \dfrac{3}{2}\dfrac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \dfrac{1}{2}w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Tensortransformatie formules:

$$k_{\overline{xx}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{yy}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{xy}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx}-k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx}+k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx}-k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \quad \Rightarrow \quad l_k = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}} \quad \text{met: } \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \qquad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \qquad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met :} \quad \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1} \; ; \; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2} \; ; \; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} . \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met :} \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte *h* van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

Naam : Hans Welleman

Studienr : Elnd uitwerking

TU Delft Delft University of Technology

Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen

Schriftelijk tentamen	**CTB2210**
	ConstructieMechanica 3
Totaal aantal pagina's	**23 pagina's excl voorblad**
Datum en tijd	**30-01-2017** van **13:30-16:30** uur
Verantwoordelijk docent	**J.W. (Hans) Welleman**

Alleen het op dit uitwerkformulier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenvragen (in te vullen door examinator)

Totaal aantal tentamenvragen: 5, allen open vragen

☐ **alle vragen tellen even zwaar**

☒ **de vragen hebben verschillende weging** *(het gewicht is in tijd weergegeven)*

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examinator)

Niet toegestaan:

- Nietje loshalen
- Mobiele telefoon, smart Phone of apparaten met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met rode pen of met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

☐ **boeken** ☐ **aantekeningen** ☐ **woordenboeken** ☐ **dictaten**

☐ **formulebladen (zie ook onder aanvullende informatie)** ☒ **rekenmachines** ☐ **computer**

☒ **grafische rekenmachine** ☒ **tekenmaterialen waaronder een passer**

Aanvullende informatie (eventueel in te vullen door examinator)

...

Uiterlijke datum nakijken tentamen: (de uiterlijke nakijktermijn is 15 werkdagen)

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

NIETJE NIET LOSHALEN !!

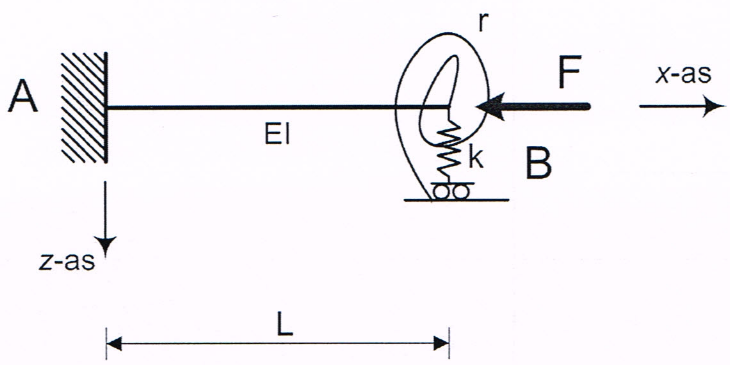
Mobiel UIT en opgeborgen in tas

==== **Technische Universiteit Delft** ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr. | | | | | | | |

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 1: Theorie (ongeveer 40 minuten)

Onderdeel 1 : Stabiliteit (ca 20 min)
In de onderstaande figuur is een deels ingeklemde ligger gegeven die op druk wordt belast. In A is de ligger ingeklemd en in B verend ondersteund en verend ingeklemd met een translatieveer *k* en een rotatieveer *r*.



Vragen:

a) Geef kort aan uit welke stappen de bepaling van de kniklast bestaat en wat u op voorhand daarbij weet/aanneemt.

- DV voor buigingslijn gebruiken als model $EIw'''' + Fw'' = 0$
- randvoorwaarden opstellen (4 stuks)
- ontstaat homogeen stelsel vergl.
- niet triviale oplossing als determinant v/h stelsel 0 is
- transcendente vergelijking voor kniklast
- iteratief bepalen van kniklast of een passende benaderingsformule zoeken
  → ingenieurs formule.
- vorm kan worden bepaald maar niet de uitbuiging
- kniklast kan worden gevonden.

Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

==== **Technische Universiteit Delft** ====

Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr.

Antwoordformulier van het tentamen :

CM3, 30 jan 2017

b) Stel de bijbehorende vergelijking(en) op en geef aan welke onbekende(n) daarmee kunnen worden bepaald.

4 onb. integratie constanten en de kniklast

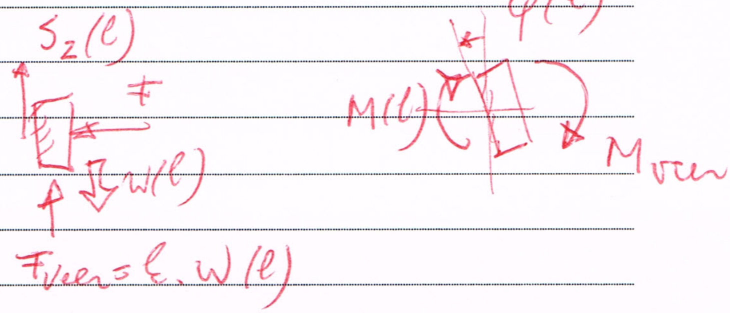
1 integratie constante blijft onbepaald

$x = 0 \quad w = 0$

$\varphi = 0$

$x = \ell \quad S_z + k w = 0$

$M + r\varphi = 0$



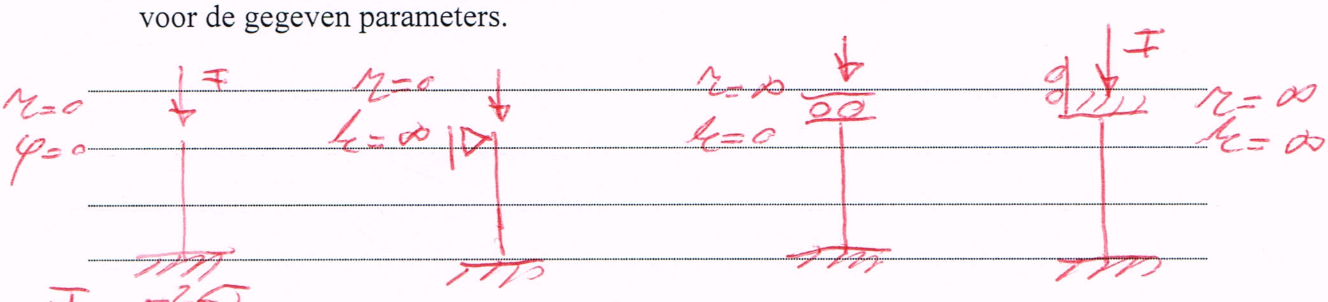
met:

$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x + C_3 x + C_4$ en $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$

$\varphi(x) = -w'(x)$

$S_z(x) = -F \cdot C_3$

c) Geef een afschatting van de grenzen waarbinnen de kniklast zich moet bevinden voor de gegeven parameters.



$F_k = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$ $\quad F_k = \frac{2\pi^2 EI}{\ell^2}$ $\quad F_k = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ $\quad F_k = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$

$$\frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} < F_k < \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

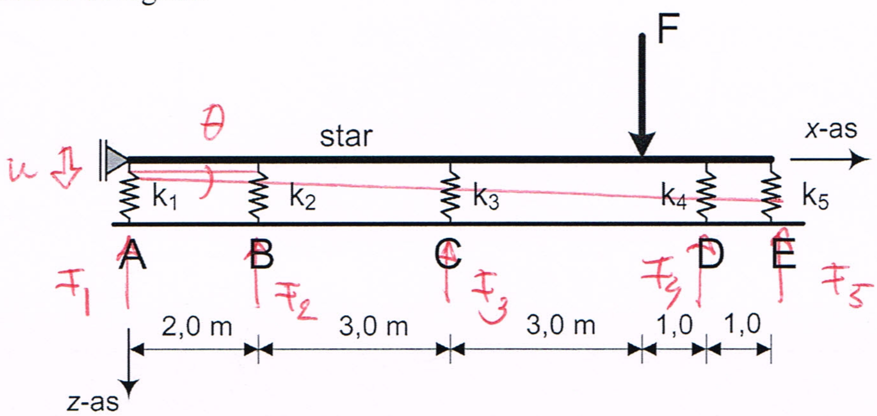
Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

==== **Technische Universiteit Delft** ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr. | | | | | | | |

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Onderdeel 2 : Verplaatsingenmethode (ca 20 min)

De onderstaande starre ligger wordt ondersteund met 5 translatieveren. Aan de linker zijde is de ligger opgelegd door middel van een verticale roloplegging. De belasting is aangegeven in de figuur.



Gegeven : $F = 2580$ kN; $k_1 = 100$ kN/m; $k_2 = 2k_1$; $k_3 = 3k_1$; $k_4 = 4k_1$; $k_5 = 5k_1$;

d) Welke onbekende(n) kiest U om de krachtsverdeling in de veren te bepalen met behulp van de verplaatsingenmethode?

kies u en θ (2 dof's)

$F_1 = k_1 \cdot u$; $F_2 = k_2(u+2\theta)$; $F_3 = k_3(u+5\theta)$;

$F_4 = k_4 \cdot (u+9\theta)$; $F_5 = k_5(u+10\theta)$;

vergelijkingen (2 e.v.)

$\Sigma F_V = 0$ $\quad F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 - F = 0$

$\Sigma T|_A = 0$ $\quad F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 5 + F_4 \cdot 9 + F_5 \cdot 10 - F \cdot 8 = 0$

Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

e) Stel de noodzakelijke vergelijking(en) op waarmee deze onbekenden kunnen worden opgelost.

(1) $100 \cdot u + 200(u+2\theta) + 300(u+5\theta) + 400(u+9\theta) + 500(u+10\theta) - F = 0$

(1) $1500u + 10500\theta - 2580 = 0$

(2) $200(u+2\theta) \cdot 2 + 300(u+5\theta) \cdot 5 + 400(u+9\theta) \cdot 9 + 500(u+10\theta) \cdot 10 - 8F = 0$

(2) $10500u + 90700\theta - 20640 = 0$

f) Los de onbekende(n) op.

$\theta = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $u = \frac{67}{100} = 0{,}67$

g) Bepaal de grootte van de kracht in veer 1 en 5 en geef aan of het hier om een trek of een drukkracht gaat.

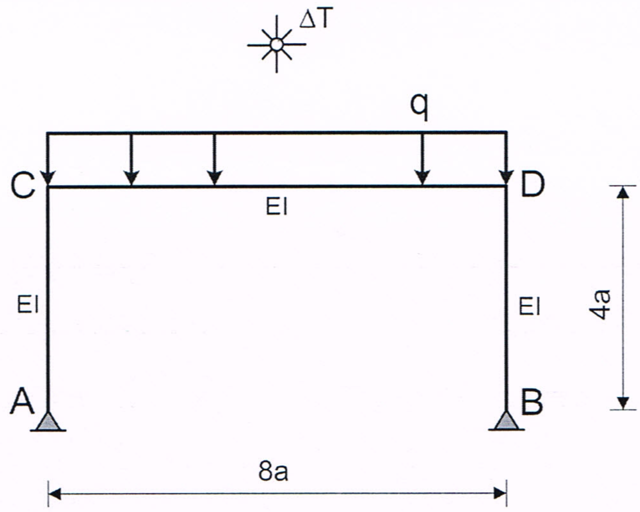
$F_1 = k_1 \cdot u = 100 \cdot \frac{67}{100} = 67$ kN

$F_5 = k_5 \cdot (u + 10\theta) = 1085$ kN

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 2: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 40 minuten)

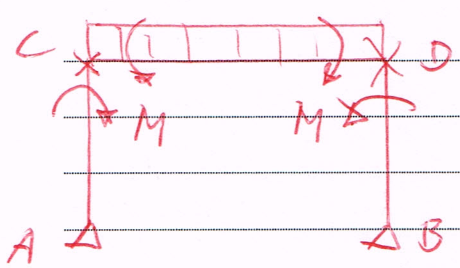
De onderstaande spantconstructie wordt aan de buitenzijde opgewarmd. Het spant wordt tevens belast op de bovenregel CD met een gelijkmatig verdeelde belasting q zoals aangegeven in de figuur. Alle staven hebben dezelfde materiaal eigenschappen en doorsnede bxh. De doorsnede is zo geplaatst dat deze op buiging om de sterke as wordt belast. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegeven : $\Delta T = 30^{\circ}$; $\alpha = 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$; $q = 8$ kN/m;
$a = 1{,}0$ m; $h = 0{,}6$ m; $EI = 32000$ kNm^2;

Vragen:

a) Bepaal de momentenverdeling t.g.v. **alleen** de gelijkmatig verdeelde belasting q.



niet verplaatsbaar i.v.m symmetrie

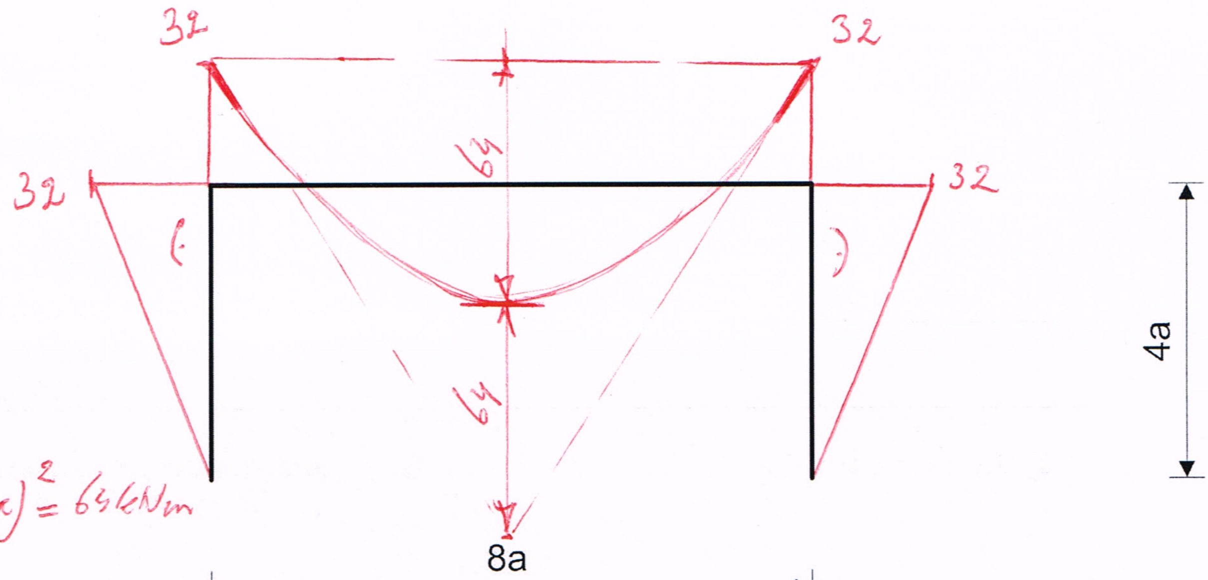
1 onb. → 1 vergl. (symmetrie)

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} \qquad -\frac{M.4a}{3EI} = \frac{M.8a}{3EI} - \frac{q(8a)^3}{24EI} + \frac{M.8a}{6EI}$$

invullen : M= 32 kNm.

Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►

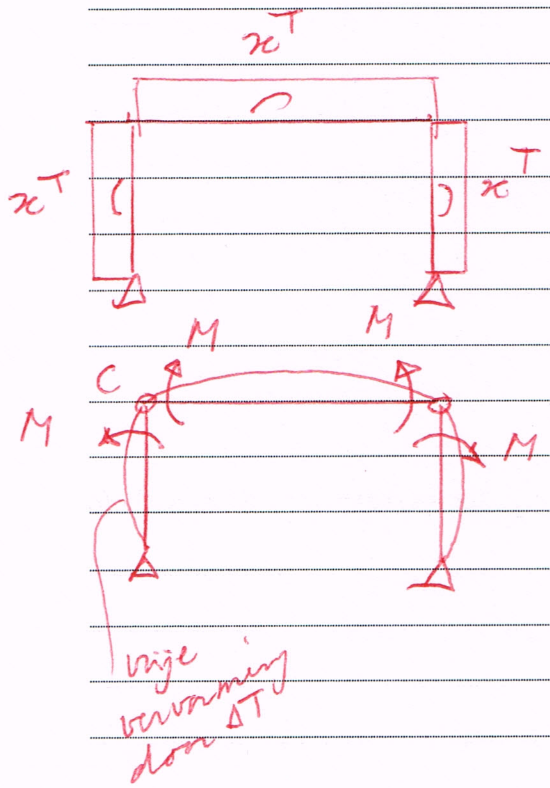
b) Teken de momentenlijn voor deze belasting inclusief vervormingstekens en schrijf de waarden op karakteristieke punten erbij.



$\frac{1}{8} q (8a)^2 = 64 \text{ kNm}$

M-lijn t.g.v q-last
in kNm

c) Bepaal de momentenverdeling t.g.v. **alleen** de temperatuursbelasting.



$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h} = 5 * 10^{-4}$

1 onbekende M (symmetrie)

bekijk C: (1 v.v.v.)

$\varphi_c^{AC} = \varphi_c^{CD}$

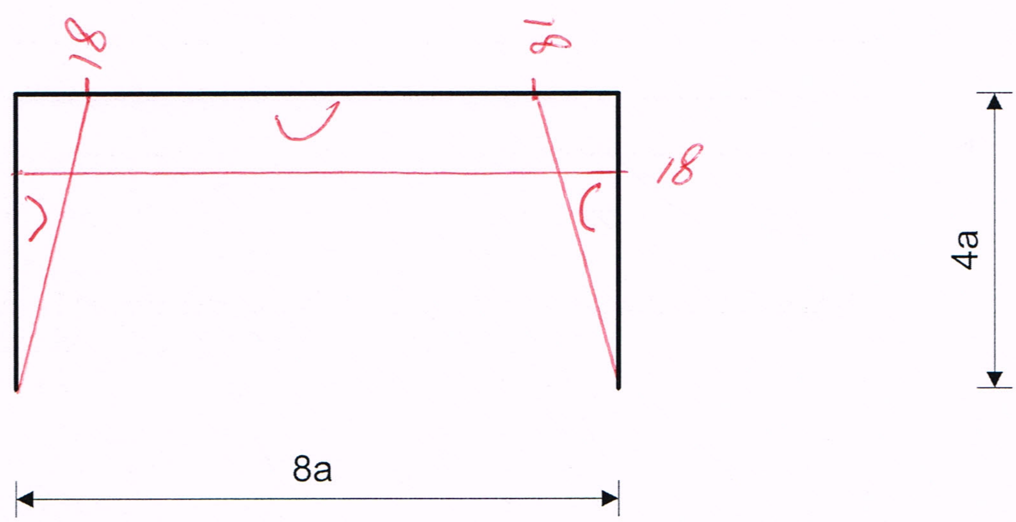
$\frac{M \cdot 4a}{3EI} - \frac{1}{2} \kappa^T \cdot 4a = -\frac{M \cdot 8a}{3EI} + \frac{1}{2} \kappa^T \cdot 8a - \frac{M \cdot 8a}{6EI}$

$M = 18 \text{ kNm}$

Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►

(niet gebruikt)

d) Teken de momentenlijn voor deze belasting inclusief vervormingstekens en schrijf de waarden op karakteristieke punten erbij.



M-lijn t.g.v temp
in kNm

Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►

e) Welke uitspraken zijn correct? [markeer indien correct]

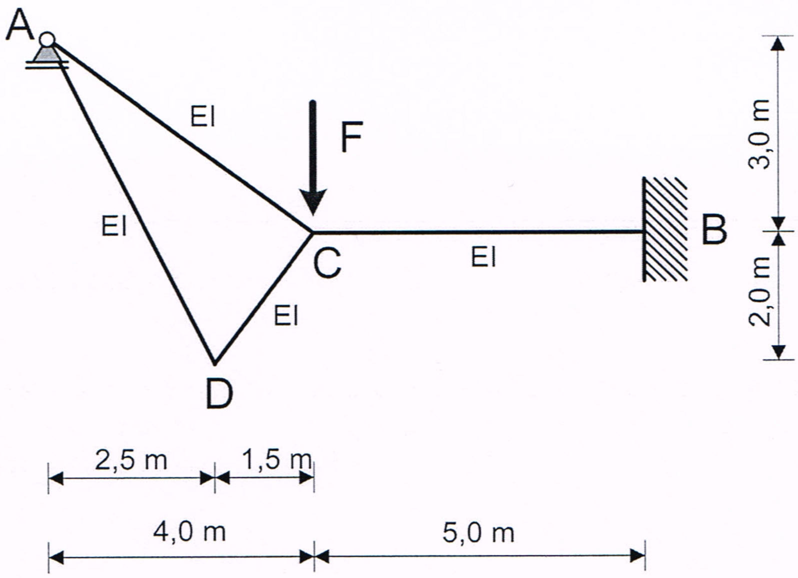
- O Het moment in C t.g.v. alleen q is afhankelijk van a
- O Het moment in C t.g.v. alleen de temperatuurslast is afhankelijk van a
- O Het superpositie beginsel geldt niet voor de genoemde belastingen.

==== **Technische Universiteit Delft** ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr.

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 3: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 30 minuten)

De onderstaande statisch onbepaalde constructie wordt belast door de aangegeven puntlast in C. De constructie is in A opgelegd op een rol en in B volledig ingeklemd. Alleen de staafverbinding in A is scharnierend, de rest is star. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegeven : $F = 50$ kN; $EI = 1000$ kNm^2;

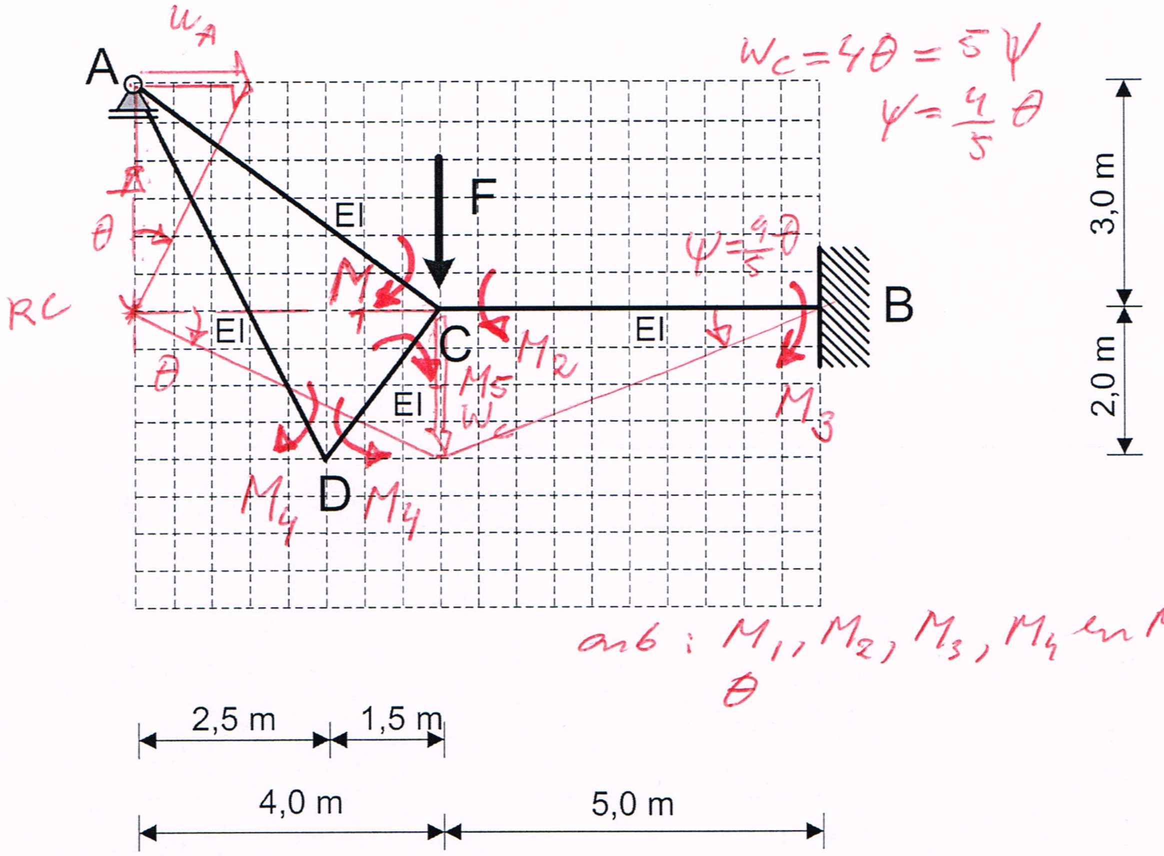
Vragen:

a) Welke uitspraken zijn correct? [markeer indien correct]

O Het moment in B is de helft van het moment in C van deel CB.
O Het moment in B is twee maal het moment in C van deel CB.
● De invloed van de puntlast zit alleen in de virtuele arbeidsvergelijking.

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

b) Geef in de onderstaande schets aan welke onbekende(n) u kiest om de krachtsverdeling te kunnen bepalen.



onb : M_1, M_2, M_3, M_4 en M_5
θ

c) Stel de vergelijking(en) op in de door u gekozen onbekenden waarmee u deze kunt oplossen. (**merk op**: los de onbekenden **niet** op, dat mag u thuis doen)

1 $\varphi_{CA} = \varphi_{CB}$ $\quad -\frac{M_1 \cdot 5}{3EI} - \theta = \frac{M_2 \cdot 5}{3EI} + \frac{M_3 \cdot 5}{6EI} + \frac{4}{5}\theta$

2 $\varphi_{CA} = \varphi_{CD}$ $\quad -\frac{M_1 \cdot 5}{3EI} \cancel{-\theta} = -\frac{M_4 \cdot 2\frac{1}{2}}{6EI} - \frac{M_5 \cdot 2\frac{1}{2}}{3EI} \cancel{-\theta}$

3 $\varphi_{DA} = \varphi_{DC}$ $\quad -\frac{M_4 \cdot 2\frac{1}{2}\sqrt{5}}{3EI} \cancel{-\theta} = \frac{M_4 \cdot 2\frac{1}{2}}{3EI} + \frac{M_5 \cdot 2\frac{1}{2}}{6EI} \cancel{-\theta}$

4 $\varphi_B = 0$ $\quad -\frac{M_2 \cdot 5}{6EI} - \frac{M_3 \cdot 5}{3EI} + \frac{4}{5}\theta = 0$

5 $M_1 + M_5 - M_2 = 0$ (knoop C in momentenevenwicht)

6 $\delta A = 0$

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

$$\delta A = \underbrace{M_1 \cdot \delta\theta + M_5 \cdot \delta\theta - \cancel{M_4} \cdot \delta\theta + \cancel{M_4} \cdot \delta\theta}_{ACD} + \underbrace{M_2 \cdot \tfrac{4}{5}\delta\theta - M_3 \cdot \tfrac{4}{5}\delta\theta}_{CB}$$

$$+ F \cdot 4\delta\theta = 0$$

VA : $M_1 + M_5 + \tfrac{4}{5} M_2 - \tfrac{4}{5} M_3 + 4F = 0.$

d) Hoe groot is de horizontale verplaatsing in A uitgedrukt in uw onbekende(n)?

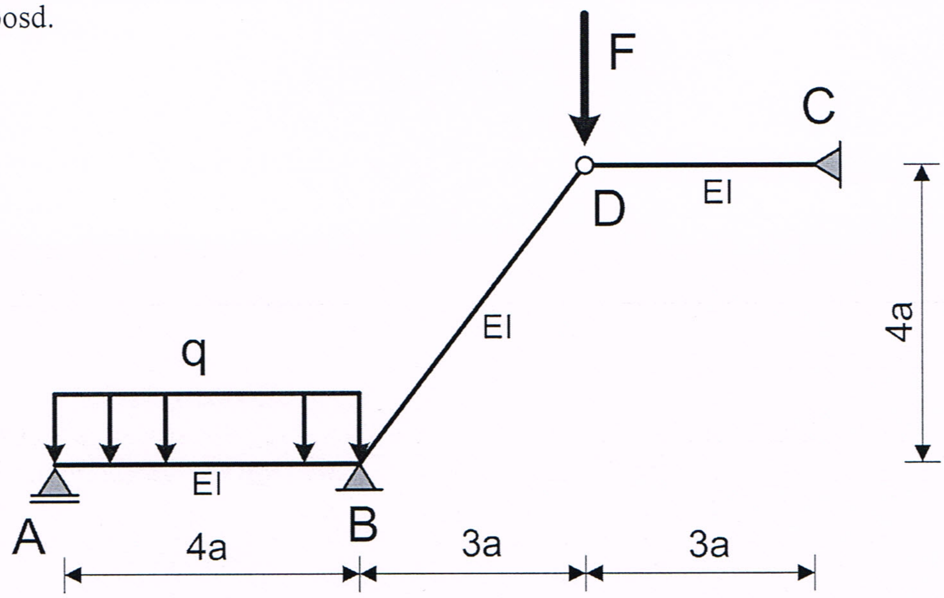
$u_A = 3\theta.$

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr.

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

Opgave 4 : Stabiliteit (ongeveer 30 minuten)

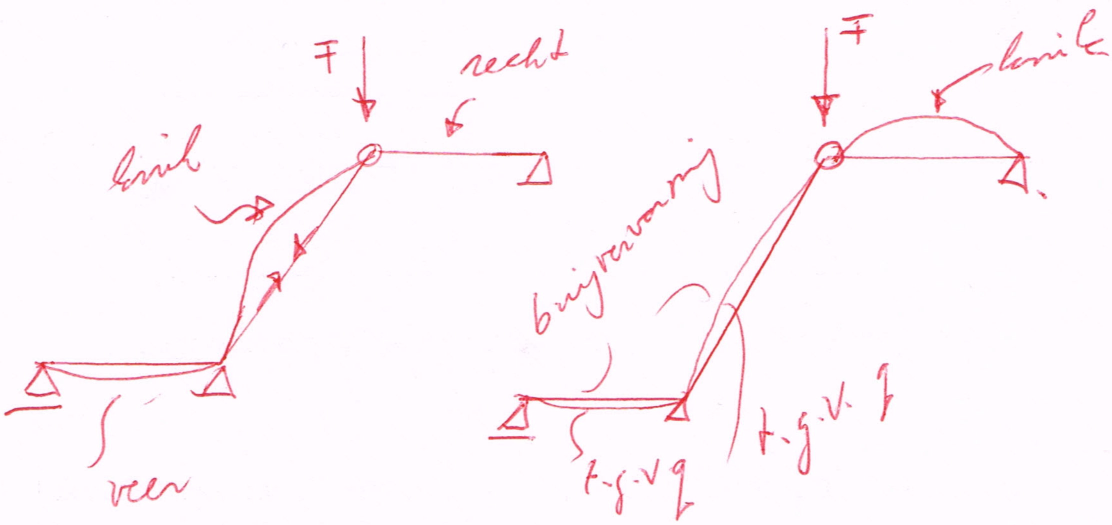
De onderstaande constructie bestaat uit een schuine kolom BD die in D gesteund wordt door een horizontale *pendelstaaf* en in B momentvast verbonden is met de ligger AB. Alle buigstijfheden zijn gelijk. De gelijkmatig verdeelde belasting q op veld AB is permanent aanwezig. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegevens: a = 1,0 m; EI = 1000 kNm^2; q = 36 kN/m; F = 100 kN;

Vragen:

a) Teken de knikvorm(en) van deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen mogelijk uitknikken en welke delen alleen buigen.

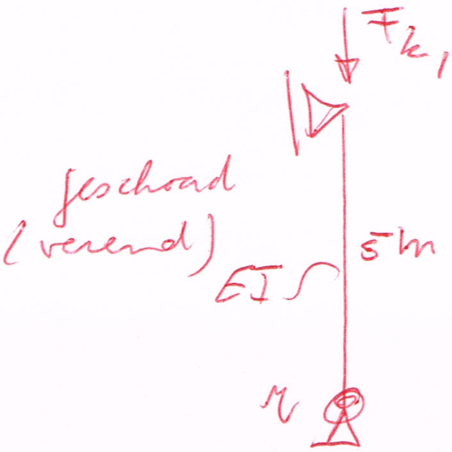


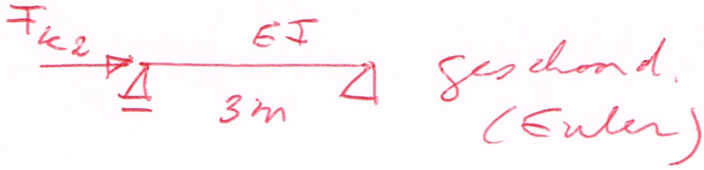
(schets)

Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ▶

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

b) Geef een schets van de rekenmodel(len) om de bijbehorende knikkracht van deze delen te bepalen en bepaal alle noodzakelijke parameters in uw model(len) en geef deze aan in de schets.





knikkracht v/d elementen
BD en DC
(niet gelijk aan uitwendige
belasting!)

$r = \frac{3EI}{4a}$ $\quad \rho = \frac{r \cdot 5}{EI} = \frac{15}{4}$

c) Bepaal met uw model de maatgevende kniklast voor *F*, maak zo nodig gebruik van het formuleblad.

$F_{k1} = \frac{(5+2\rho)(5)}{(5+\rho)(5)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{5^2} = 564$ kN $\quad$ (571 met $\pi^2 = 10$)

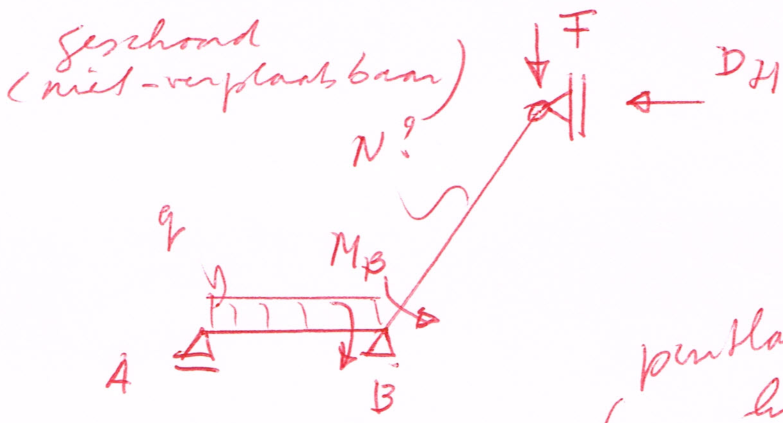
$F_{k2} = \frac{\pi^2 EI}{(3a)^2} = 1097$ kN $\quad$ (1111 kN met $\pi^2 = 10$)

normaalkracht bepalen in BC en DC
(let op: SO constructie)

Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ►

==== **Technische Universiteit Delft** ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr.

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017



puntlast F op niet-verplaatsbare knoop komt niet in v.v.v.!
Dus levert geen moment-bijdrage, wel normaalkracht!

$$\varphi_B^{BA} = \varphi_B^{BD} \qquad -\frac{M_B \cdot 4}{3EI} + \frac{q \cdot 4^3}{24EI} = \frac{M_B \cdot 5}{3EI}$$

$M_B = 32$ kNm

$$D_H = \frac{3}{4}F - \frac{M_B}{4} = 67 \text{ kN}$$

$$N = -\frac{5}{4}F + \frac{3}{5} \times 8 = -120,2 \text{ kN}$$

(−125 wordt ook goed gerekend)

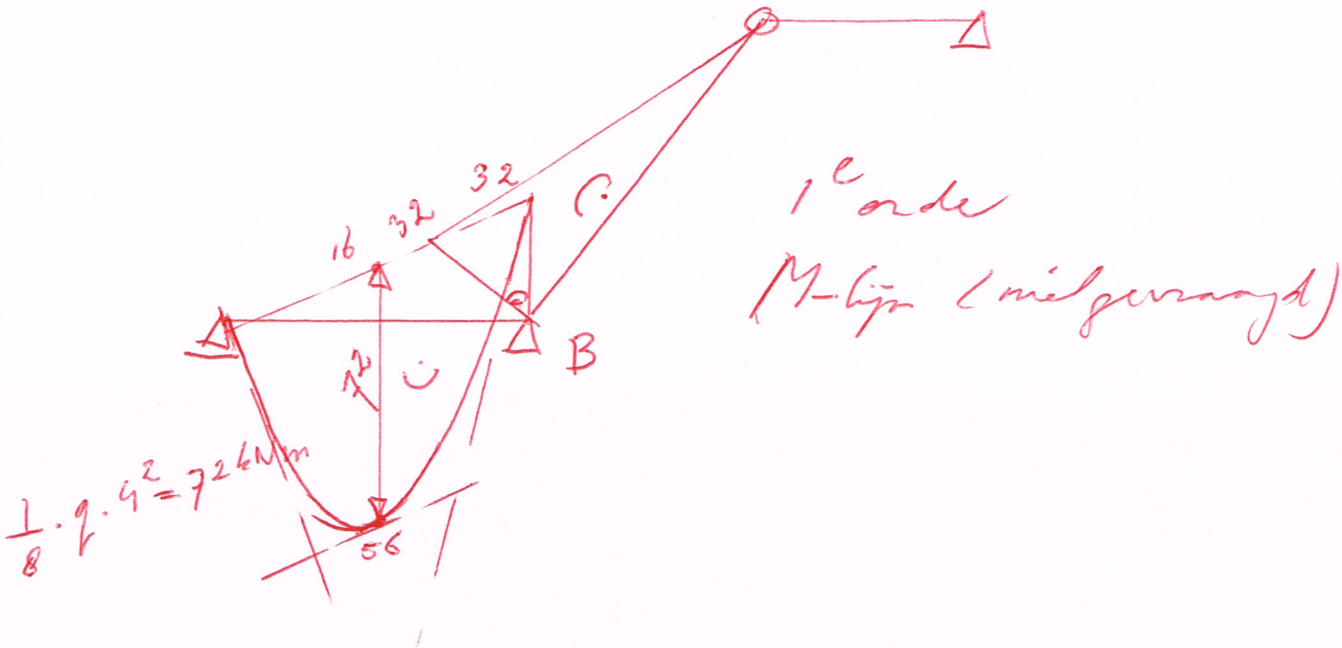
controle (Loets):

67 < 1111 of 1097 kN ok

120,2 < 571 of 564 kN ok.
(of 125)

Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ►

d) Bepaal het 1^e orde moment in B.



$M_{B_1} = 32$ kNm

e) Bepaal het 2^e orde moment in B (mag een goede afschatting zijn).

$n = \frac{F_k}{F} = \frac{1111}{120,2} = 9,24 \qquad \frac{n}{n-1} = 1,12$

doorrekenfouten worden hier meegenomen.

$M_{2_B} = 1,12 \, M_{1_B} = 35,9$ kNm

==== **Technische Universiteit Delft** ====

Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr. | | | | | | | |

Antwoordformulier van het tentamen :

CM3, 30 jan 2017

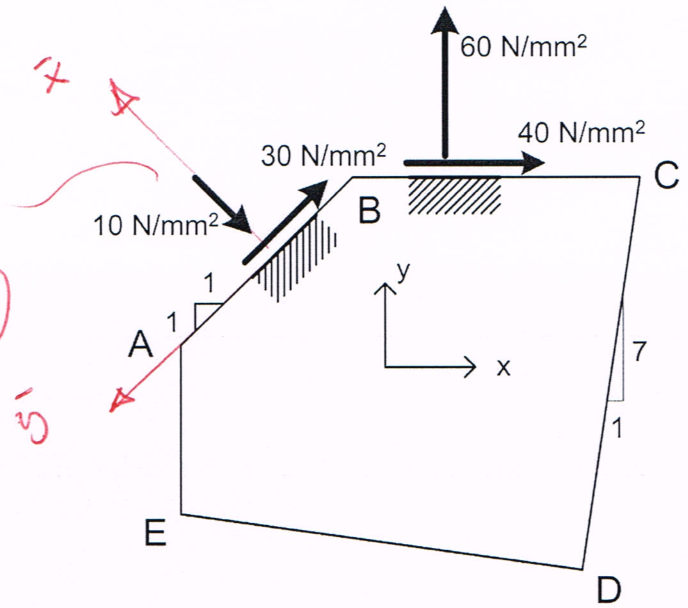
Opgave 5 : Elasticiteitstheorie (ongeveer 40 minuten)

Een proefstuk ABCDE verkeert in een homogene isotrope vlakspanningstoestand. Van twee vlakken zijn de normaal en schuifspanning bekend. Deze vlakjes zijn hieronder getekend samen met het assenstelsel dat wordt aangehouden.

$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = -10$

$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = -30$

punt $(-10; -30)$



$\sigma_{yy} = 60$

$\sigma_{yx} = 40$

punt $(60; 40)$

Gegeven: $E = 10000$ N/mm^2; $G = 4000$ N/mm^2; $f_y = 140$ N/mm^2;

Vragen

a) Welke bewering is **niet** correct? [markeer indien **niet** correct]

O Een positieve hoofdspanning 1 en 2 geeft een hogere capaciteit als Tresca wordt gehanteerd i.p.v. von Mises (op basis van een trekproef).

O Een positieve hoofdspanning 1 in combinatie met een negatieve hoofdspanning 2 levert een gelijke capaciteit als waarbij beiden positief zijn.

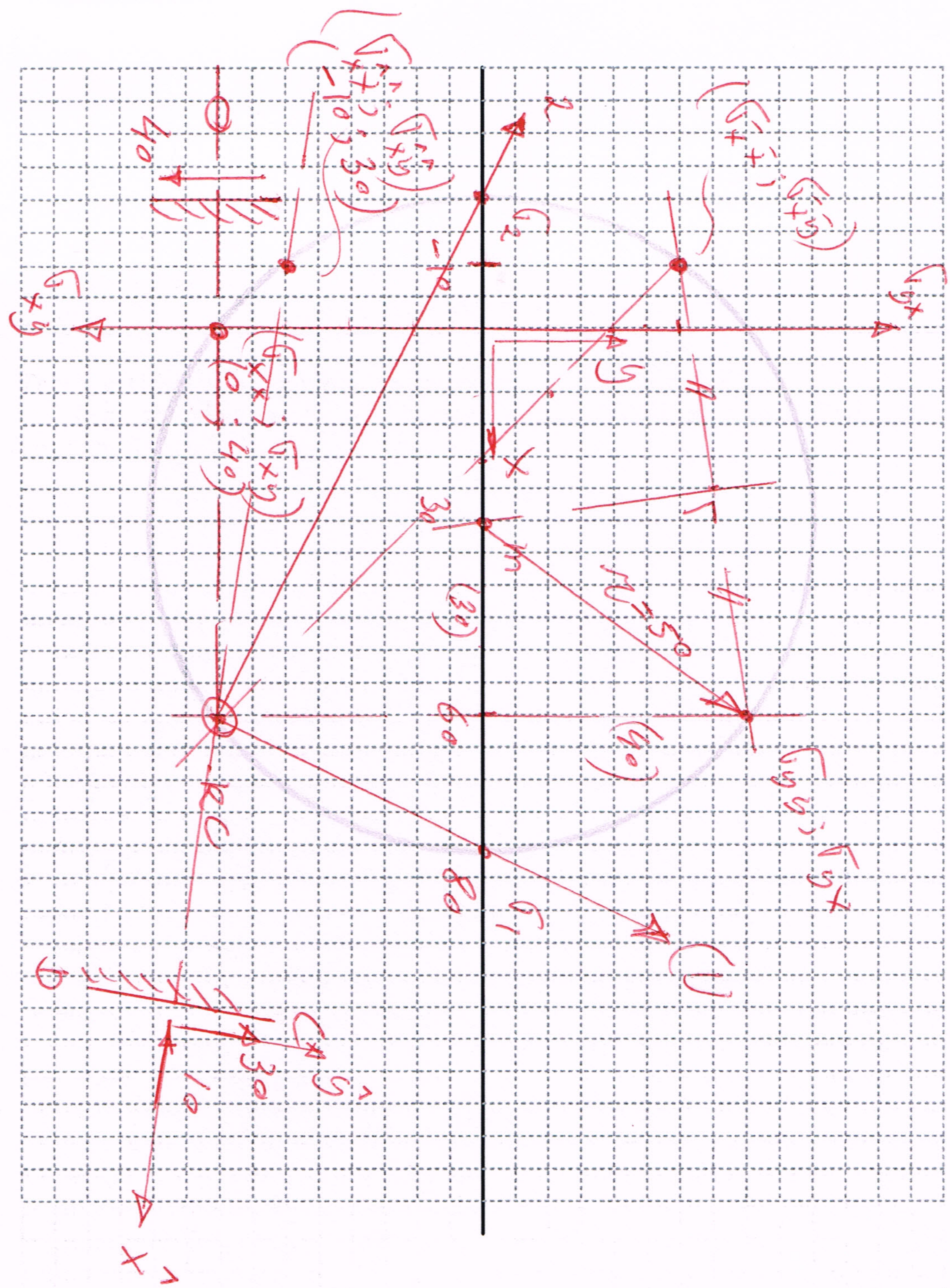
O Het Tresca criterium valt precies samen met het von Mises criterium (op basis van een trekproef) indien de hoofdspanningen in absolute zin gelijk zijn aan de vloeispanning.

Voor vervolg opgave 5 zie volgend blad ►

b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het **richtingencentrum** en de **hoofdrichtingen** en **hoofdspanningen** aan. Draai dit blad linksom. Bepaal de hoofdspanningen m.b.v. een berekening op basis van de cirkelinformatie.

Cirkel van Mohr

Schaal: 1 hokje = 5,0 N/mm^2



$\sigma_1 =$ 80 N/mm^2 ; $\sigma_2 =$ -20 N/mm^2 ;

Voor vervolg opgave 5 zie volgend blad ▶

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3 Studienr.

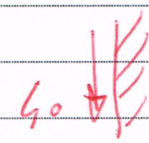
Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

c) Bepaal met de cirkel van Mohr de spanningen op het vlak AE en DC en teken deze zoals ze in werkelijkheid werken en zet de getalswaarde erbij.

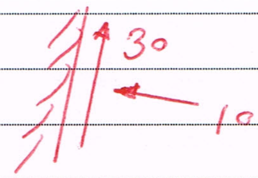
$(\sigma_{\bar{x}\bar{x}} ; \sigma_{\bar{x}\bar{y}}) = (-10 ; -30)$

$(\sigma_{yy} ; \sigma_{yx}) = (60 ; 40)$

AE = x-vlakje (negatief)



DC = $\hat{x}$-vlakje



d) Bepaal de rektensor op basis van de gevonden spanningstensor.

$E = 10.000$ en $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 4000$ dus $\nu = 0,25$

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(0 - \frac{1}{4} \cdot 40\right) = -1,5 * 10^{-3}$

$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(60 - \frac{1}{4} \cdot 0\right) = 6,0 * 10^{-3}$

$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = 5 * 10^{-3}$

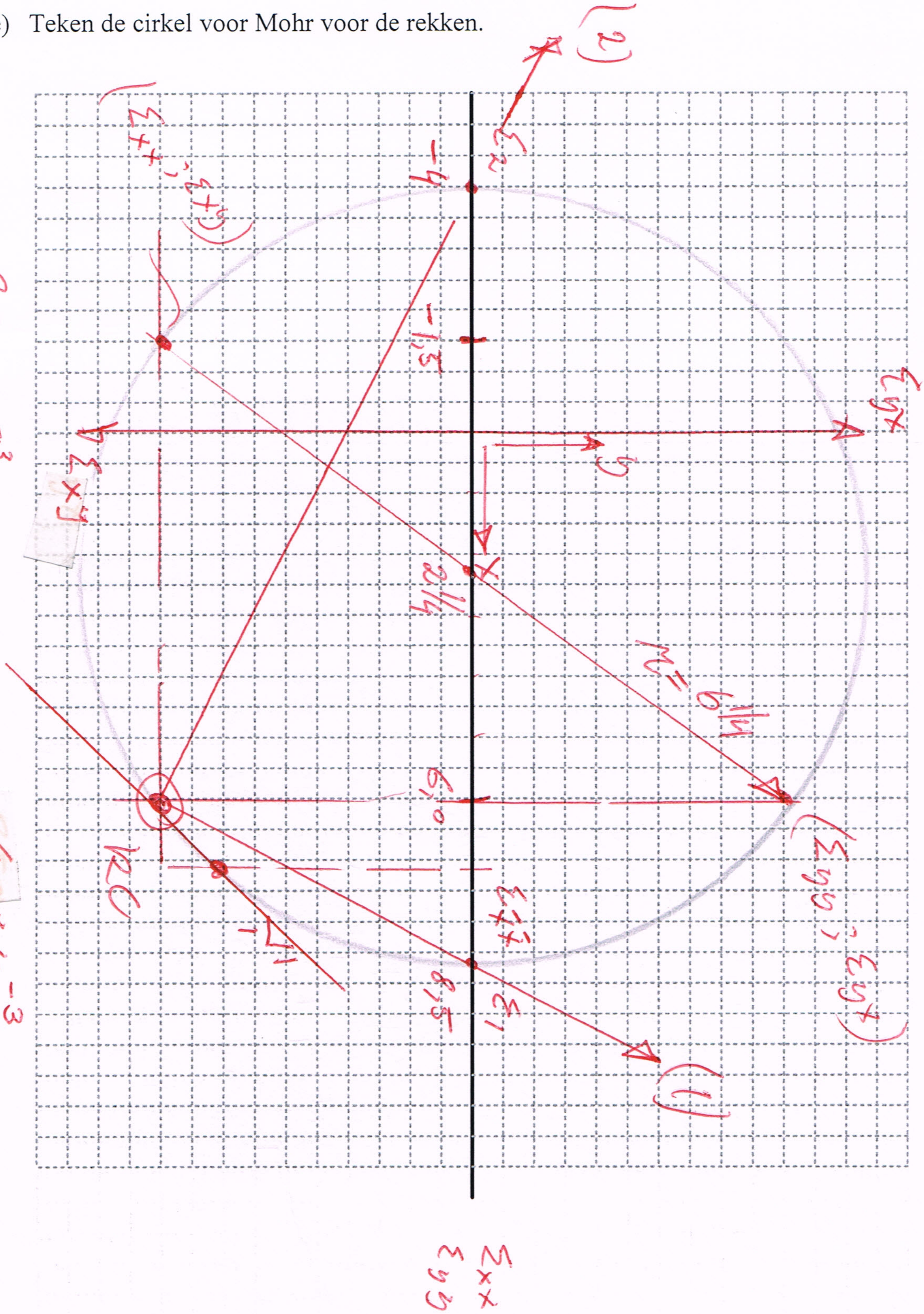
$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1,5 & 5,0 \\ 5,0 & 6,0 \end{bmatrix} * 10^{-3}$

Voor vervolg opgave 5 zie volgend blad ►

Antwoordformulier van het tentamen :
CM3, 30 jan 2017

e) Teken de cirkel voor Mohr voor de rekken.

Cirkel van Mohr



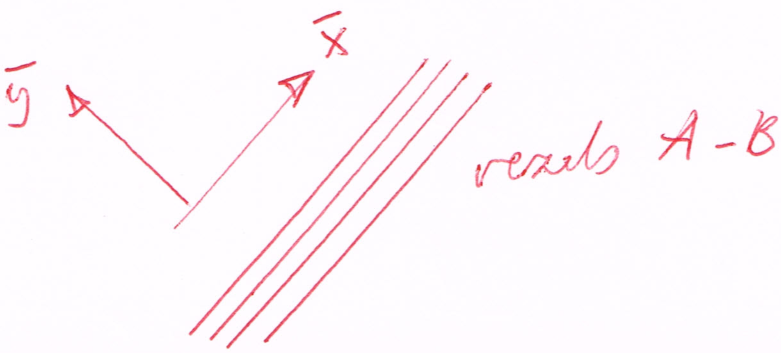
Schaal: 1 hokje = $0{,}5 \times 10^{-3}$

$\varepsilon_1 =$ 8,5 * 10^{-3}

$\varepsilon_2 =$ -4,0 * 10^{-3}

Voor vervolg opgave 5 zie volgend blad ►

f) Bepaal de rek in een vezel evenwijdig aan AB. (mag exact of door deze af te lezen uit de rekcirkel)

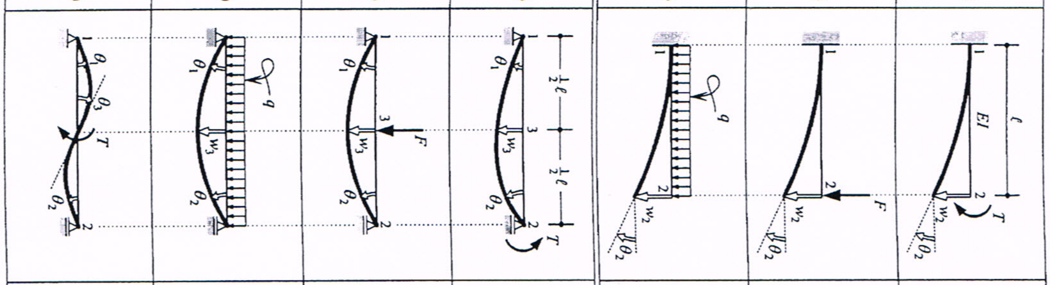


lees $\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}$ af in cirkel $= 7,25 \times 10^{-3}$

afleesfout van $\pm$ 0,25 is ook goed.

Laatste blad voor de formulebladen

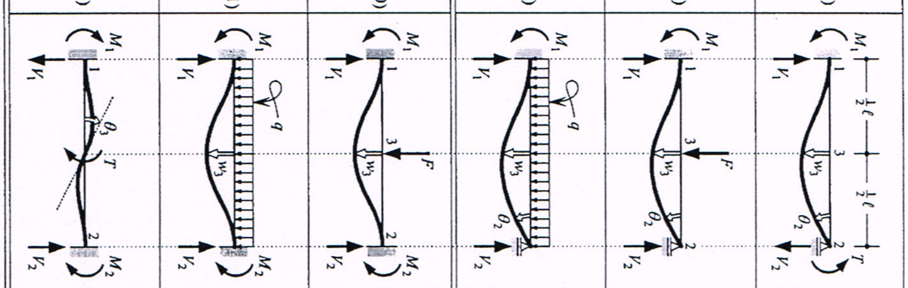
FORMULEBLAD
(scheur dit blad en verder los van het werk)



	Formules
(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) — *vergeet-mij-nietjes*

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) — *statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)*



	Formules
(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

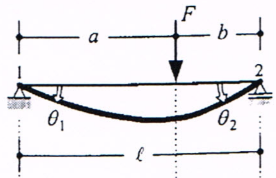
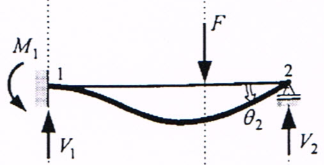
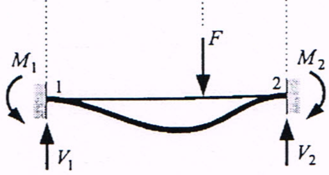
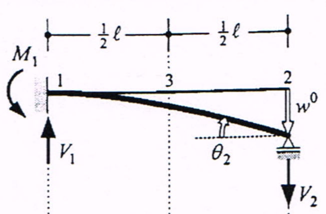
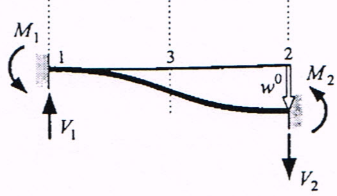
$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \dfrac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{6EI}\left(2\dfrac{a}{\ell} - 3\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \dfrac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{6EI}\left(\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$	*drie bij-de handjes*
(d)		$M_1 = \dfrac{Fb(\ell^2-b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a}{\ell} - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \dfrac{Fb(3\ell^2-b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \dfrac{Fa^2(3\ell-a)}{2\ell^3} = F\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \dfrac{Fa^2b}{4EI\ell} = \dfrac{F\ell^2}{4EI}\left(\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$	
(e)		$M_1 = \dfrac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a}{\ell} - 2\dfrac{a^2}{\ell^2} + \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \dfrac{Fb^2(\ell+2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\dfrac{a^2}{\ell^2} + 2\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $M_2 = \dfrac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\dfrac{a^2}{\ell^2} - \dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \dfrac{Fa^2(\ell+2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\dfrac{a^2}{\ell^2} - 2\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$	
(f)		$M_1 = \dfrac{3EI}{\ell^2}w^0;\quad V_1 = V_2 = \dfrac{3EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \dfrac{9}{8}\dfrac{w^0}{\ell};\quad w_3 = \dfrac{5}{16}w^0$	*zettingen*
(g)		$M_1 = M_2 = \dfrac{6EI}{\ell^2}w^0;\quad V_1 = V_2 = \dfrac{12EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_3 = \dfrac{3}{2}\dfrac{w^0}{\ell};\quad w_3 = \dfrac{1}{2}w^0$	

Tensortransformatie formules:

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx}-k_{yy})};\quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx}+k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx}-k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_\text{k}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_\text{k} = l\sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

$$\text{met:} \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_\text{k} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met : } \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1} ; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2} ; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} . \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met : } \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \, \Delta T}{h}$$

Faculteit
Civiele Techniek en
Geowetenschappen

OPGAVE FORMULIER

Schriftelijk tentamen	**CTB2210**
	ConstructieMechanica 3
Totaal aantal pagina's	**8 pagina's excl voorblad**
Datum en tijd	**14-04-2016** van **13:30-16:30** uur
Verantwoordelijk docent	**J.W. (Hans) Welleman**

Alleen het op het uitwerkformulier geschreven werk / antwoord wordt beoordeeld, tenzij onder 'aanvullende informatie' anders is aangegeven.

Tentamenopgaven (in te vullen door examinator)

Totaal aantal tentamenopgaven: 5, allen met open vragen

☐ **alle opgaven tellen even zwaar**

☒ **de opgaven hebben verschillende weging** *(het gewicht is in tijd weergegeven)*

Gebruik hulpmiddelen en informatiebronnen tijdens tentamen (in te vullen door examinator)

Niet toegestaan:

- Mobiele telefoon, smart Phone of apparaten met vergelijkbare functies.
- Antwoord geschreven met rode pen of met potlood.
- Hulpmiddelen en/of informatiebronnen tenzij hieronder anders vermeld.

Toegestaan:

☐ **boeken** ☐ **aantekeningen** ☐ **woordenboeken** ☐ **dictaten**

☐ **formulebladen (zie ook onder aanvullende informatie)** ☒ **rekenmachines** ☐ **computer**

☒ **grafische rekenmachine** ☒ **tekenmaterialen waaronder een passer**

Aanvullende informatie (eventueel in te vullen door examinator)

Het antwoordformulier wordt door een scanner ingelezen en verder digitaal verwerkt. Het is dus van het grootste belang binnen de aangegeven ruimte te blijven en duidelijk te schrijven.

Uiterlijke datum nakijken tentamen: (de uiterlijke nakijktermijn is 15 werkdagen)

!

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

Mobiel UIT

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

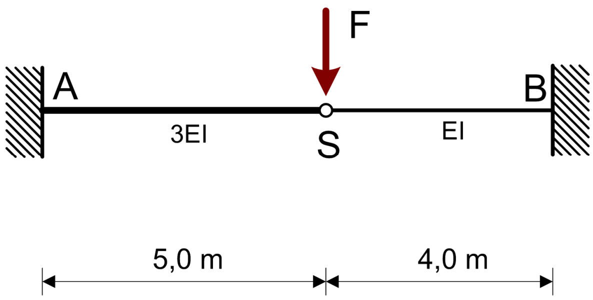
Opgave 1: Theorie (ongeveer 30 minuten)

Deze opgave bestaat uit twee onderdelen. Ieder onderdeel betreft een afzonderlijk probleem. In totaal heeft deze opgave vier vragen; a) t/m d).

LET OP BIJ DE BEANTWOORDING:

Gebruik uitsluitend het **antwoordformulier** en blijf binnen de aangegeven ruimte. De antwoordbladen gaan door de scanner en het tentamen wordt verder digitaal verwerkt. Alle bladen zijn uniek gekoppeld aan uw naam en kunnen dus niet vervangen worden door nieuwe bladen. **Vraag om assistentie van de surveillanten als u grote problemen ondervindt.**

Onderdeel 1 : Verplaatsingenmethode
In de onderstaande figuur is een ingeklemde scharnierligger gegeven, belast met een puntlast F die aangrijpt op het scharnier. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. De constructie is in A en B volledig ingeklemd. Let op de verschillen in buigstijfheid tussen staafdelen AS en SB.



Gegeven : F = 317 kN; EI = 80000 kNm^2;

Vragen:

a) Geef aan welke fundamentele onbekende(n) u kiest indien de krachtsverdeling wordt opgelost met behulp van de (discrete) verplaatsingenmethode.

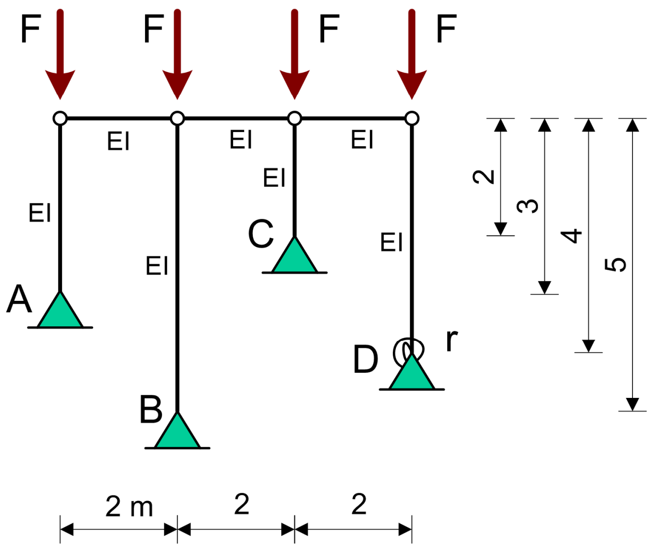
b) Stel de bijbehorende vergelijking(en) op waarmee u de fundamentele onbekende(n) kunt bepalen en los deze op.

c) Bepaal de dwarskrachtverdeling voor de gehele constructie en teken deze verdeling inclusief de vervormingstekens. Zet de waarden erbij.

Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

Onderdeel 2 : Stabiliteit
De onderstaande figuur bestaat uit 3 pendelkolommen en een verend ingeklemde kolom. De rotatieveerstijfheid is aangegeven met *r*. De vier kolommen met buigstijfheid *EI* worden verticaal belast met de aangegeven puntlasten F. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegeven : $r = 2500$ kNm/rad; $EI = 1500$ kNm^2;

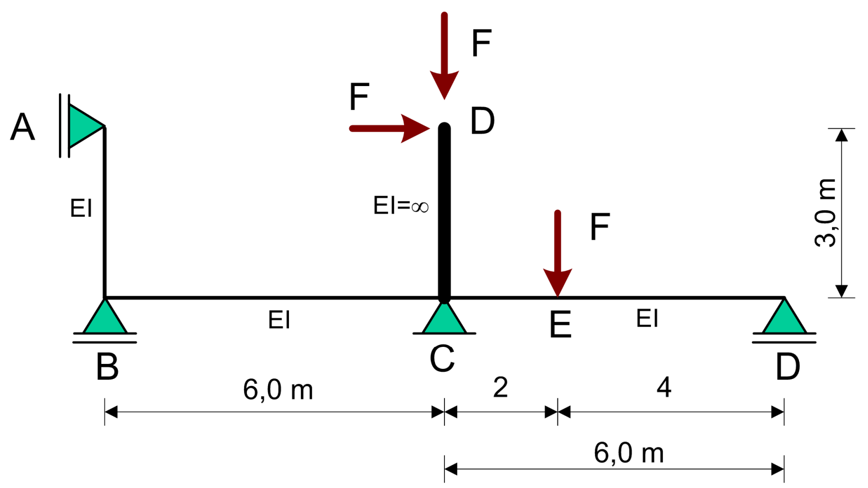
Vragen:

d) Bepaal de maximale waarde voor *F* waarbij instabiliteit optreedt.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

Opgave 2: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 40 minuten)

Het hieronder weergegeven raamwerk is deel CD volledig star. De doorgaande staaf ABCD is haaks omgezet in B en wordt belast in E met de aangegeven puntlast F. Ook in D grijpen twee puntlasten F aan zoals aangeven in de figuur. Alle staafverbindingen zijn momentvast en de invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.



Gegevens: EI = 10000 kNm^2; F = 99 kN;

Vragen:

a) Analyseer deze constructie en geef het model dat u hanteert om de krachtsverdeling te bepalen met behulp van de krachtenmethode. Ondersteun dit onderdeel met een duidelijke schets met daarin aangegeven de door u aangenomen onbekende(n).

b) Stel de noodzakelijke vergelijkingen op en los de door u aangenomen onbekende(n) op. Hierbij mag u het probleem zoveel mogelijk reduceren en gebruik maken van alle op het formuleblad gegeven *vergeet-mij-nietjes*.

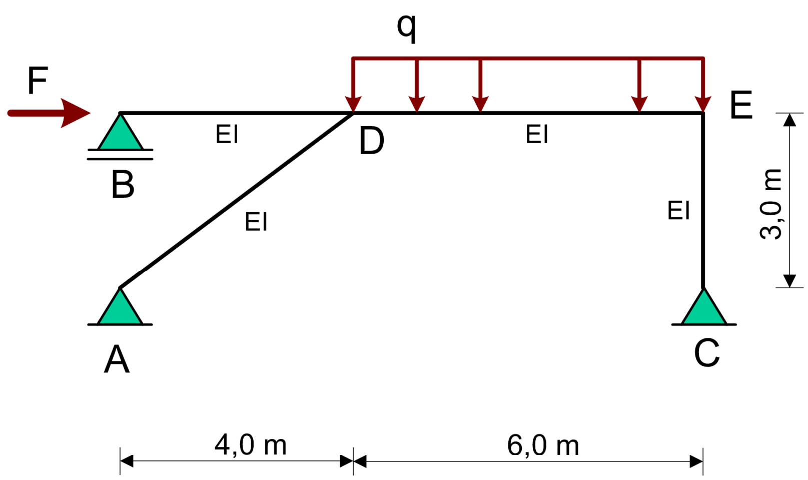
c) Teken voor de gehele constructie de momentenlijn inclusief de vervormingstekens en zet op karakteristieke punten de waarden erbij. Kies zelf een geschikte schaal.

d) Teken voor de gehele constructie de normaalkrachtenlijn en geef met het teken aan of het om trek of druk gaat. Kies zelf een geschikte schaal.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

Opgave 3: Statisch onbepaalde constructies (ongeveer 30 minuten)

De onderstaande statisch onbepaalde constructie wordt belast door de aangegeven horizontale puntlast F in B en een gelijkmatig verdeelde belasting q op deel DE. Alle verbindingen zijn momentvast en de invloed van de normaalkrachtvervorming mag verwaarloosd worden.



Vragen:

a) Hoeveel-voudig statisch onbepaald is deze constructie?

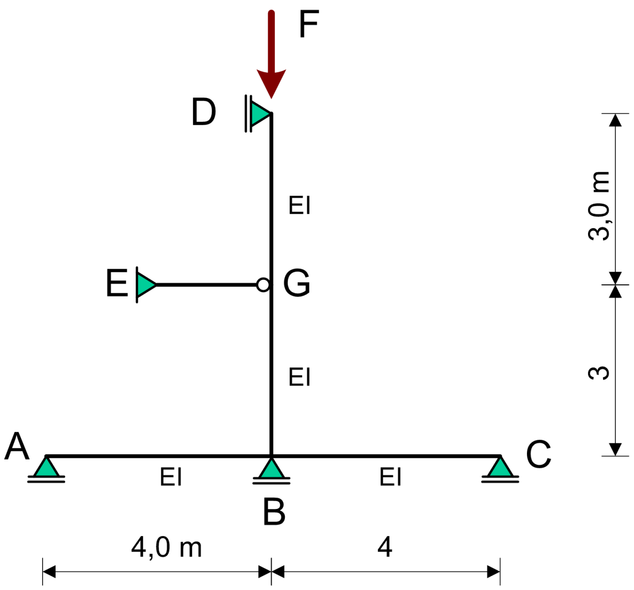
b) Geef in een schets aan welke onbekende(n) u kiest om de krachtsverdeling te kunnen bepalen.

c) Stel de vergelijking(en) op waarmee u de onbekenden kunt oplossen. (ga deze **niet** oplossen). Gebruik zo nodig het volgende blad voor verduidelijkende schetsen.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

Opgave 4 : Stabiliteit (ongeveer 35 minuten)

De onderstaande constructie bestaat uit een kolom DB die in G horizontaal wordt gesteund door een pendel EG en aan de onderzijde momentvast is verbonden aan de horizontale ligger ABC. Alle staven hebben een buigstijfheid *EI*. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. De opleggingen A,B, C en D zijn allen rolopleggingen.



Gegevens: EI = 5000 kNm^2;

Vragen:

a) Teken de knikvorm(en) van deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen mogelijk uitknikken en welke delen alleen buigen.

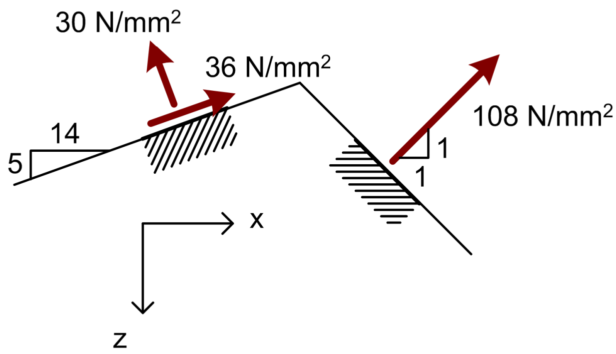
b) Geef een schets van het rekenmodel dat u hanteert om voor het <u>onderste deel</u> GB van de kolom de kniklast te bepalen. Bepaal ook alle noodzakelijke parameters in uw model en geef deze aan in de schets.

c) Bepaal met uw model de kniklast van deel GB. Maak zo nodig gebruik van het formuleblad.

==== Technische Universiteit Delft ====
Civiele Techniek, ConstructieMechanica 3
Opgaveformulier van het tentamen :
CM3, 14 april 2016

Opgave 5 : Elasticiteitstheorie (ongeveer 45 minuten)

Van een plaat in een homogene isotrope vlakspanningstoestand zijn op twee vlakken die niet loodrecht op elkaar staan de getekende spanningen bekend. De vlakjes zijn hieronder getekend waarbij bekend is dat de normaalspanning van 108 N/mm^2 een hoofdspanning is.



Verder zijn van het materiaal de volgende materiaalparameters gegeven:

$$E = 150000 \text{ N/mm}^2; \nu = 0,25; f_y = 115 \text{ N/mm}^2;$$

Vragen

a) Wat houdt een homogene isotrope spanningssituatie in?

b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het **richtingencentrum** en de **hoofdrichtingen** en **hoofdspanningen** aan. Bepaal de hoofdspanningen m.b.v. een berekening op basis van de cirkelinformatie en geef de getalswaarden op 1 decimaal aan in de tekening.

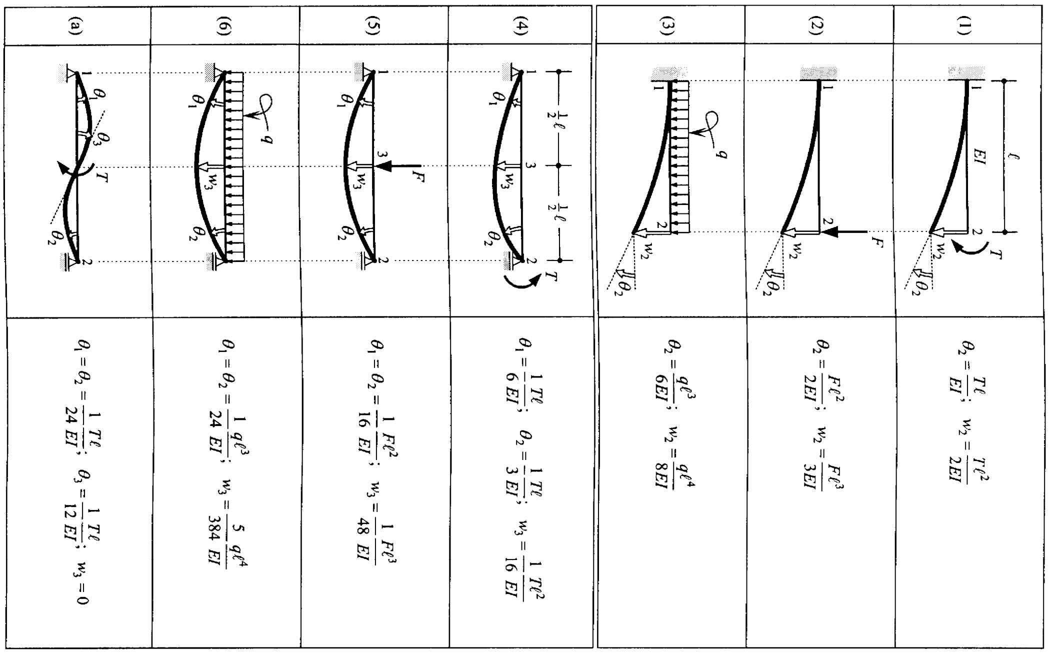
c) Bepaal met de cirkel van Mohr de spanningstensor en teken de spanningen op de vlakjes zoals deze in werkelijkheid werken en zet de getalswaarde erbij.

d) Bepaal de rektensor op basis van de gevonden spanningstensor.

e) Bepaal de veiligheidsfactor van de gegeven spanningstoestand op basis van het criterium van Tresca.

Laatste blad voor de formulebladen

FORMULEBLAD
(scheur dit blad en verder los van het werk)



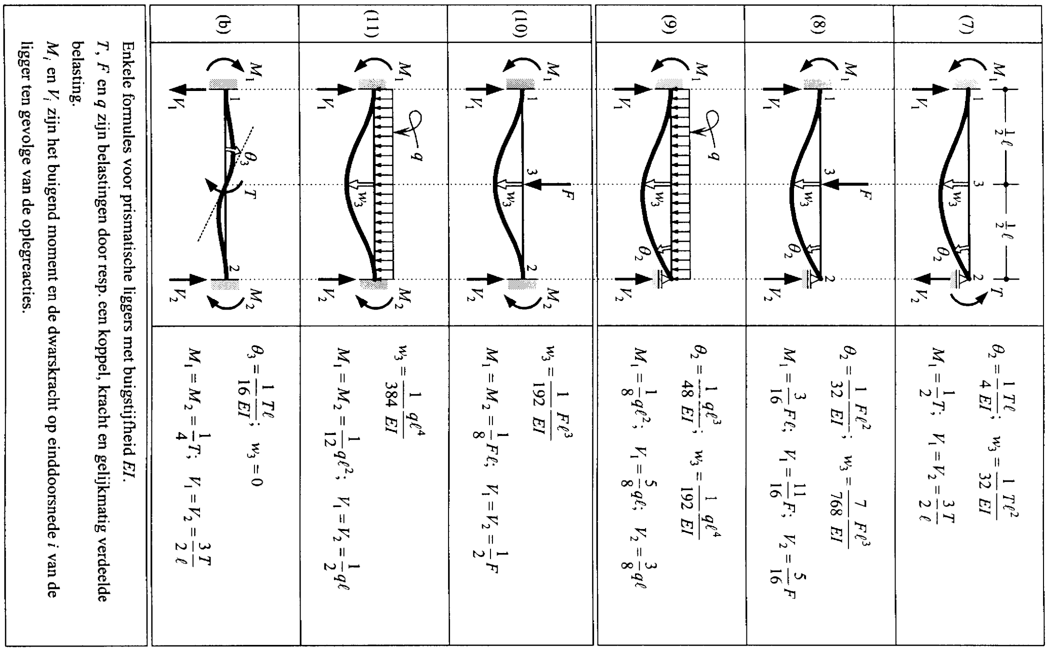
(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) — (4), (5), (6), (a)

vergeet-mij-nietjes — (1), (2), (3)

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) — (10), (11), (b)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd) — (7), (8), (9)



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

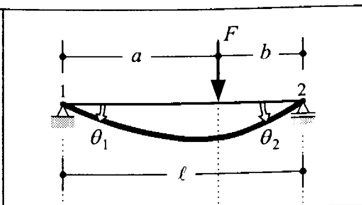
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

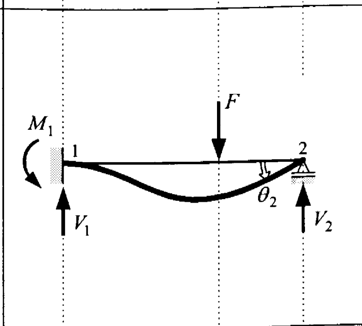
(c)



$$\theta_1 = \frac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(d)



$$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

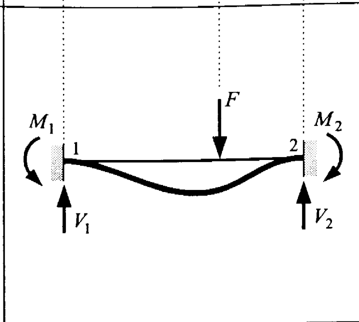
$$V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

drie bij-de handjes

(e)



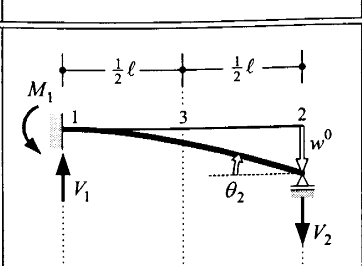
$$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(f)



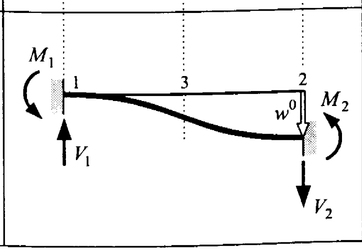
$$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$$

$$\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16}w^0$$

zettingen

(g)



$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2}w^0$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_{\mathrm{k}}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow \quad l_{\mathrm{k}} = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}} \quad \text{met:} \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_{\mathrm{k}} = \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2-4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met : } \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \dfrac{10}{\rho_1} \; ; \; \rho_1 = \dfrac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \dfrac{10}{\rho_2} \; ; \; \rho_2 = \dfrac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met : } \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuurs-
verloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

Studienummer

1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
0	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vakje volledig invullen ■

Opgaven

1	2	3	4	5

Naam student

modeluitwerking

Hertentamen CTB2210 ConstructieMechanica 3

14 April 2016, 13:30 - 16:30

Statisch onbepaalde constructies, stabiliteit van het evenwicht en inleiding elasticiteitstheorie.
Het antwoordformulier wordt door een scanner ingelezen en verder digitaal verwerkt. Het is dus van het grootste belang binnen de aangegeven ruimte te blijven en duidelijk te schrijven. Verwijder niet het nietje, alle bladen zijn uniek gecodeerd en kunnen niet worden vervangen.

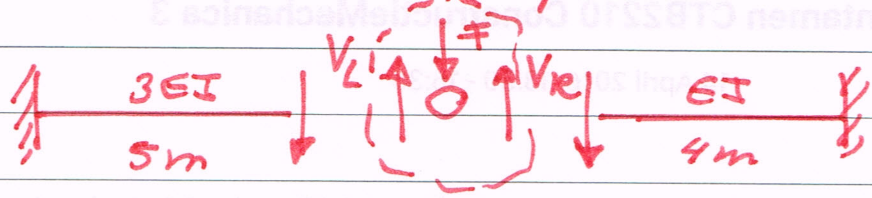
Opgave 1 : Theorie

(a) Geef aan welke fundamentele onbekende(n) u kiest indien de krachtsverdeling wordt opgelost met behulp van de (discrete) verplaatsingenmethode.

Zakking w_s van het scharnier

(b) Stel de bijbehorende vergelijkinge(n) op waarmee u de onbekende(n) kunt bepalen en los deze op.

Σ verticale krachten op scharnier $= 0$



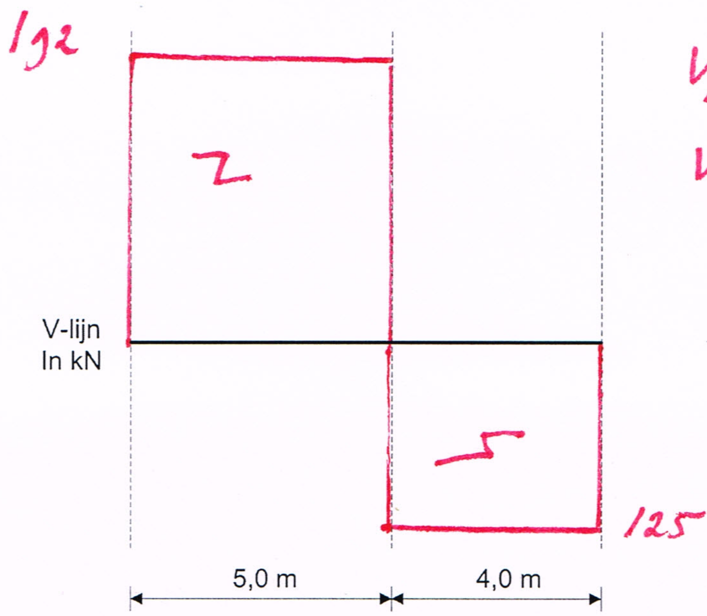
$w_s = \frac{V_L 5^3}{3 \cdot 3EI} \Leftrightarrow$ evenwicht $w_s = \frac{V_R 4^3}{3EI} \Leftrightarrow$

$V_L = \frac{9EI}{125} \cdot w_s$ $\quad V_R = \frac{3EI}{64} w_s$

$\Sigma F_y = 0: \quad -V_L + F - V_R = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9EI}{125} + \frac{3EI}{64}\right) w_s = F$

$w_s = \frac{8000}{951 EI} \cdot F = \frac{1}{30}\ m = 0{,}033\ m$

(c) Bepaal de dwarskrachtverdeling voor de gehele constructie en teken deze de verdeling inclusief de vervormingstekens. Zet de waarden erbij.



$V_L = 192$ kN

$V_k = 125$ kN

(d) Bepaal de maximale waarde voor F waarbij instabiliteit optreedt,

lokale knik $\quad F < F_{kL} = \dfrac{\pi^2 EI}{5^2} \approx 600\text{ kN} \ (592)$

globale knik $\quad F_{tot} < F_{kG}$ met $\dfrac{1}{F_{kG}} = \dfrac{1}{r/4} + \dfrac{1}{\frac{\pi^2 EI}{8^2}}$

$F_{tot} = F + \dfrac{F \cdot 4}{3} + \dfrac{F \cdot 4}{5} + \dfrac{F \cdot 4}{2} = \dfrac{77}{15} F$ en $F_{kG} = 168{,}8$ kN

$\dfrac{77}{15} F < 168{,}8 \Rightarrow F < 32{,}8$ kN (maatgevend)

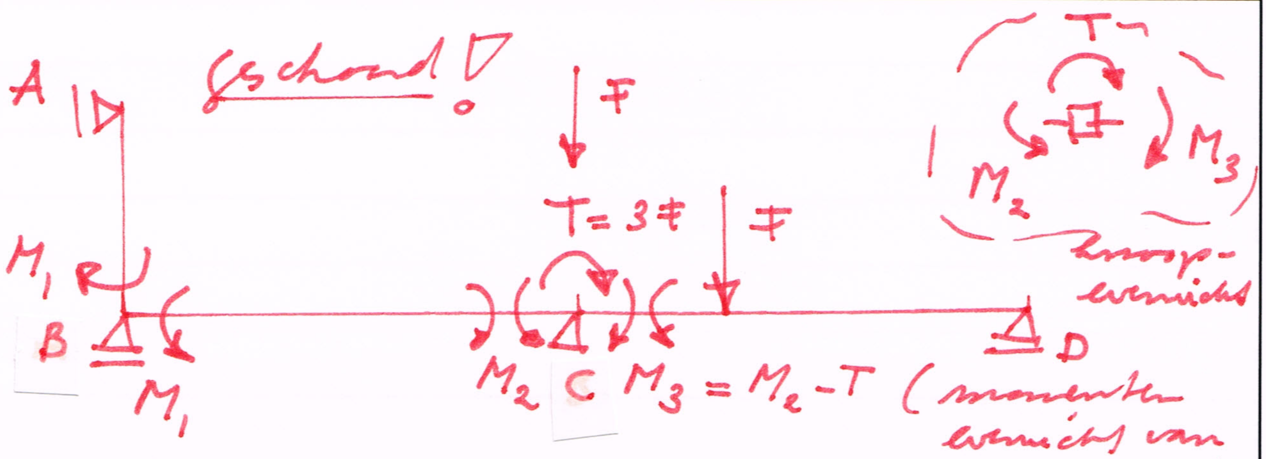
This answerbox will continue on the next page.

This answerbox belongs to question d.

(niet gebruikt)

Opgave 2 : Statisch Onbepaalde constructies

(a) Analyseer deze constructie en geef het model dat u hanteert om de krachtsverdeling te bepalen met behulp van de krachtenmethode. Ondersteun dit onderdeel met een duidelijke schets met daarin aangegeven de door u aangenomen onbekende(n).



$n = 5$
$e.v = 3$
$n = 2$

2 onb momenten
2 vormveranderingsvoorwaarden

(b) Stel de noodzakelijke vergelijkingen op en los de door u aangenomen onbekende(n) op. Hierbij mag u het probleem zoveel mogelijk reduceren en gebruik maken van alle op het formuleblad gegeven vergeet-mij-nietjes.

$$\varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BC} : \quad \frac{-M_1 \cdot 3}{3EI} = \frac{M_1 \cdot 6}{3EI} + \frac{M_2 \cdot 6}{6EI} \qquad (1)$$

$$\varphi_C^{BC} = \varphi_C^{CD} : \quad -\frac{M_1 \cdot 6}{6EI} - \frac{M_2 \cdot 6}{3EI} = \frac{(M_2 - T) \cdot 6}{3EI} - \frac{F \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10}{6EI \cdot 6} \qquad (2)$$

(1) : $3M_1 + M_2 = 0$ $\qquad M_2 = -3M_1$

(2) : $M_1 + 4M_2 = 2T + \frac{80}{36} F$

$M_1 = -74$ kNm ; $M_2 = 222$ kNm ; $M_3 = -75$ kNm

This answerbox will continue on the next page.

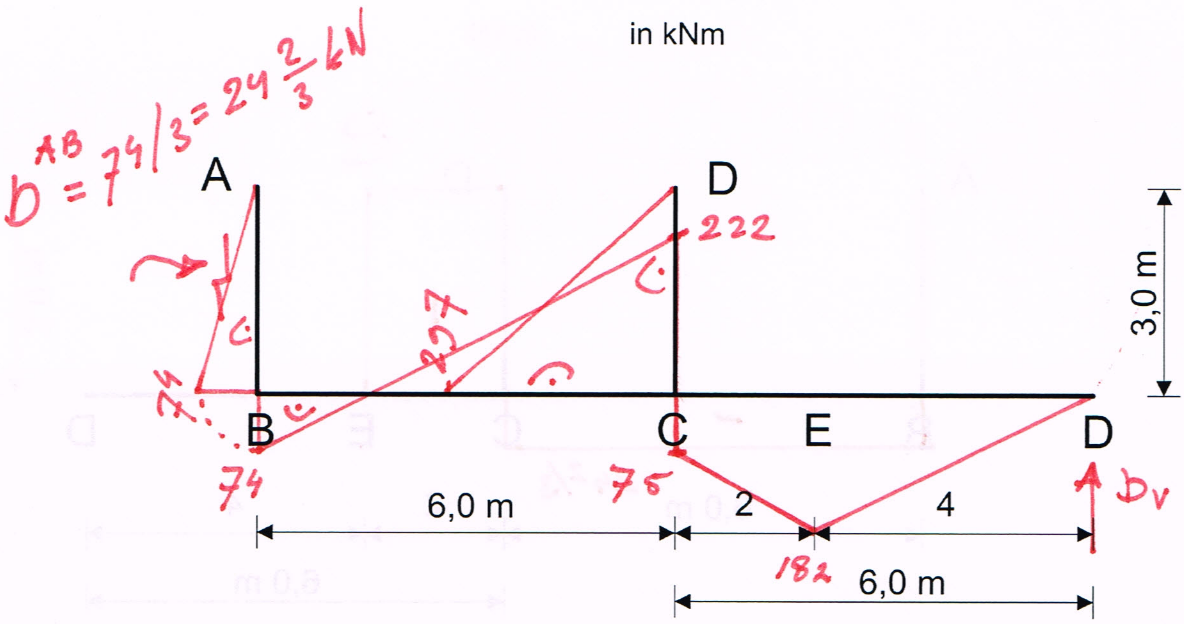
This answerbox belongs to question b.

(niet gebruikt)

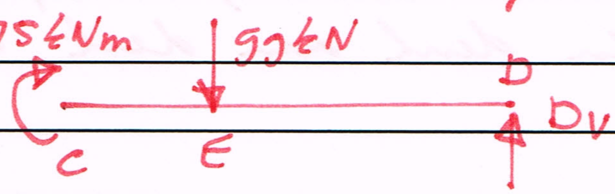
(c) Teken voor de gehele constructie de momentenlijn inclusief de vervormingstekens en zet op karakteristieke punten de waarden erbij. Kies zelf een geschikte schaal.

M-lijn

in kNm



moment in E? Eerst D_V bepalen dan snede in E.

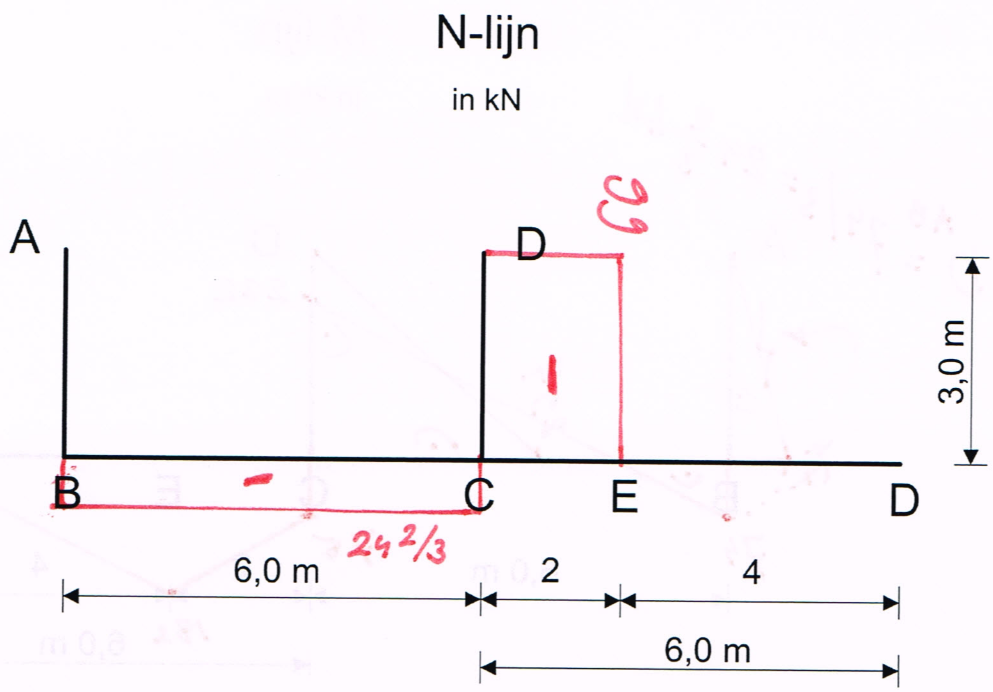


$\Sigma T|_C = 0 \quad 75 + 99 \cdot 2 - D_V \cdot 6 = 0$

$D_V = 45{,}5$ kN (↑)

$M_E = 45{,}5 \times 4 = 182$ kNm

(d) Teken voor de gehele constructie de normaalkrachtenlijn en geef met het teken aan of het om trek of druk gaat. Kies zelf een geschikte schaal.



$V^{AB} = N^{BC}$; let op tekens en denk aan deel CD

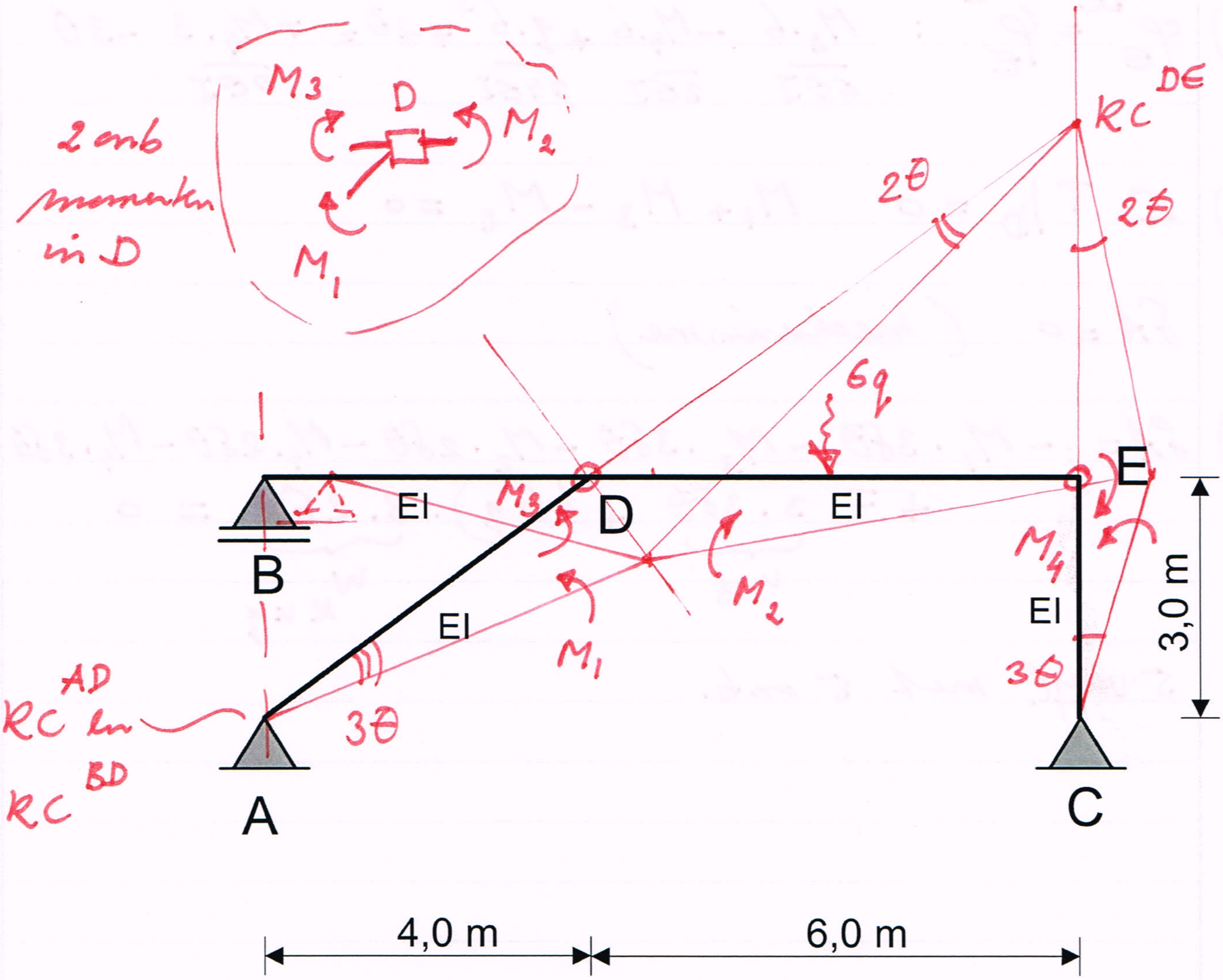
Opgave 3 : Statisch Onbepaalde Constructies

(a) Hoeveel-voudig statisch onbepaald is deze constructie?

$r = 5$
$ev = 3$
$n = 2$

2-voudig statisch onbepaald.

(b) Geef in de onderstaande schets aan welke onbekende(n) u kiest om de krachtsverdeling te kunnen bepalen



3 fund onbekende momenten en (M_1, M_2 en M_4)
1 onbekende rotatie θ
1 evenwichtsvergl voor M_3

(c) Stel de vergelijking(en) op waarmee u de onbekenden kunt oplossen. (ga deze niet oplossen). Gebruik zo nodig het volgende blad voor verduidelijkende schetsen.

1) $\varphi_D^{AD} = \varphi_D^{DE}$: $+\frac{M_1 \cdot 5}{3EI} - 3\theta = -\frac{M_2 \cdot 6}{3EI} + \frac{M_4 \cdot 6}{6EI} - \frac{q \cdot 6^3}{24EI} + 2\theta$

2) $\varphi_D^{BD} = \varphi_D^{AD}$: $+\frac{M_3 \cdot 4}{3EI} - 3\theta = +\frac{M_1 \cdot 5}{3EI} - 3\theta$

3) $\varphi_E^{DE} = \varphi_E^{EC}$: $\frac{M_2 \cdot 6}{6EI} - \frac{M_4 \cdot 6}{3EI} + \frac{q \cdot 6^3}{24EI} + 2\theta = +\frac{M_4 \cdot 3}{3EI} - 3\theta$

4) $\Sigma T|_D = 0 \qquad M_1 + M_3 - M_2 = 0$

$\delta A = 0$ (mechanisme)

5) $\delta A = -M_1 \cdot 3\delta\theta - M_3 \cdot 3\delta\theta - M_2 \cdot 2\delta\theta - M_4 \cdot 2\delta\theta - M_4 \cdot 3\delta\theta$
$+ F \cdot \underbrace{3 \cdot 3\delta\theta}_{u_B} + (6q) \cdot \underbrace{3 \cdot 2\delta\theta}_{w_{k.v.q}} = 0$

5 vergl. met 5 onb.

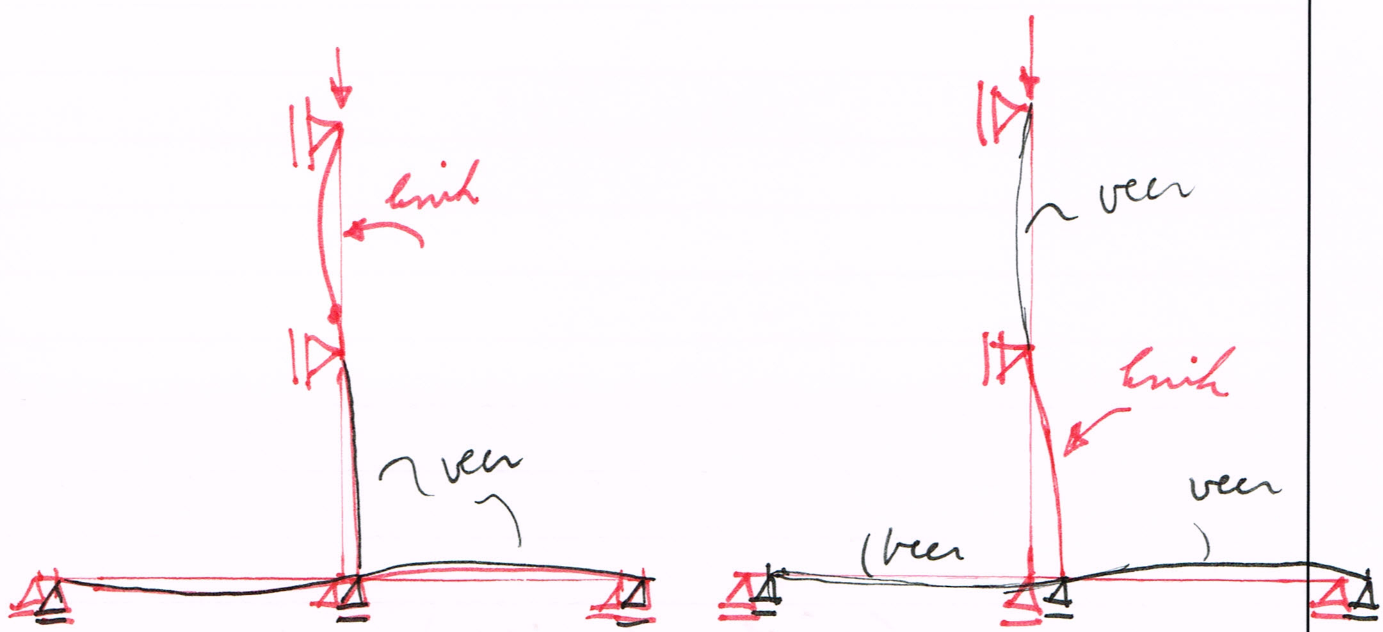
This answerbox will continue on the next page.

This answerbox belongs to question c.

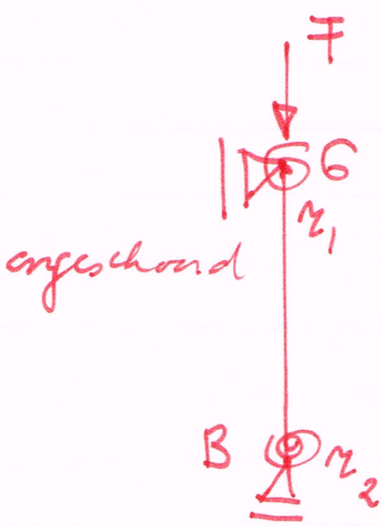
(niet gebruikt)

Opgave 4 : Stabiliteit

(a) Teken de knikvorm(en) van deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen mogelijk uitknikken en welke delen alleen buigen.



(b) Geef een schets van het rekenmodel dat u hanteert voor het bepalen van de knikkracht van het onderste deel GB van de kolom. Bepaal ook alle noodzakelijke parameters in uw model en geef deze aan in uw schets.



$$r_1 = \frac{3EI}{3{,}0}$$

$$r_2 = \frac{3EI}{4{,}0} + \frac{3EI}{4{,}0} = \frac{6EI}{4{,}0}$$

This answerbox will continue on the next page.

This answerbox belongs to question b.

(c) Bepaal met uw model de kniklast van deel GB. Maak zonodig gebruik van het formuleblad.

ongeschoord, n-formule

$\rho_1 = \frac{r_1 \cdot 3}{EI} = 3 \qquad n_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1} = \frac{22}{3}$

$\rho_2 = \frac{r_2 \cdot 3}{EI} = 4\frac{1}{2} \qquad n_2 = 4 + \frac{10}{4\frac{1}{2}} = \frac{56}{9}$

$F_k = \frac{\left(\frac{22}{3} + \frac{56}{9}\right)^2}{\frac{22}{3} \cdot \frac{56}{9}\left(\frac{22}{3} + \frac{56}{9} - 4\right)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{3^2} = 0{,}421 \times \frac{\pi^2 \cdot 5000}{9}$

$F_k = 2310{,}8$ kN $\quad$ ($\pi^2 \approx 10$ levert 2341 kN)

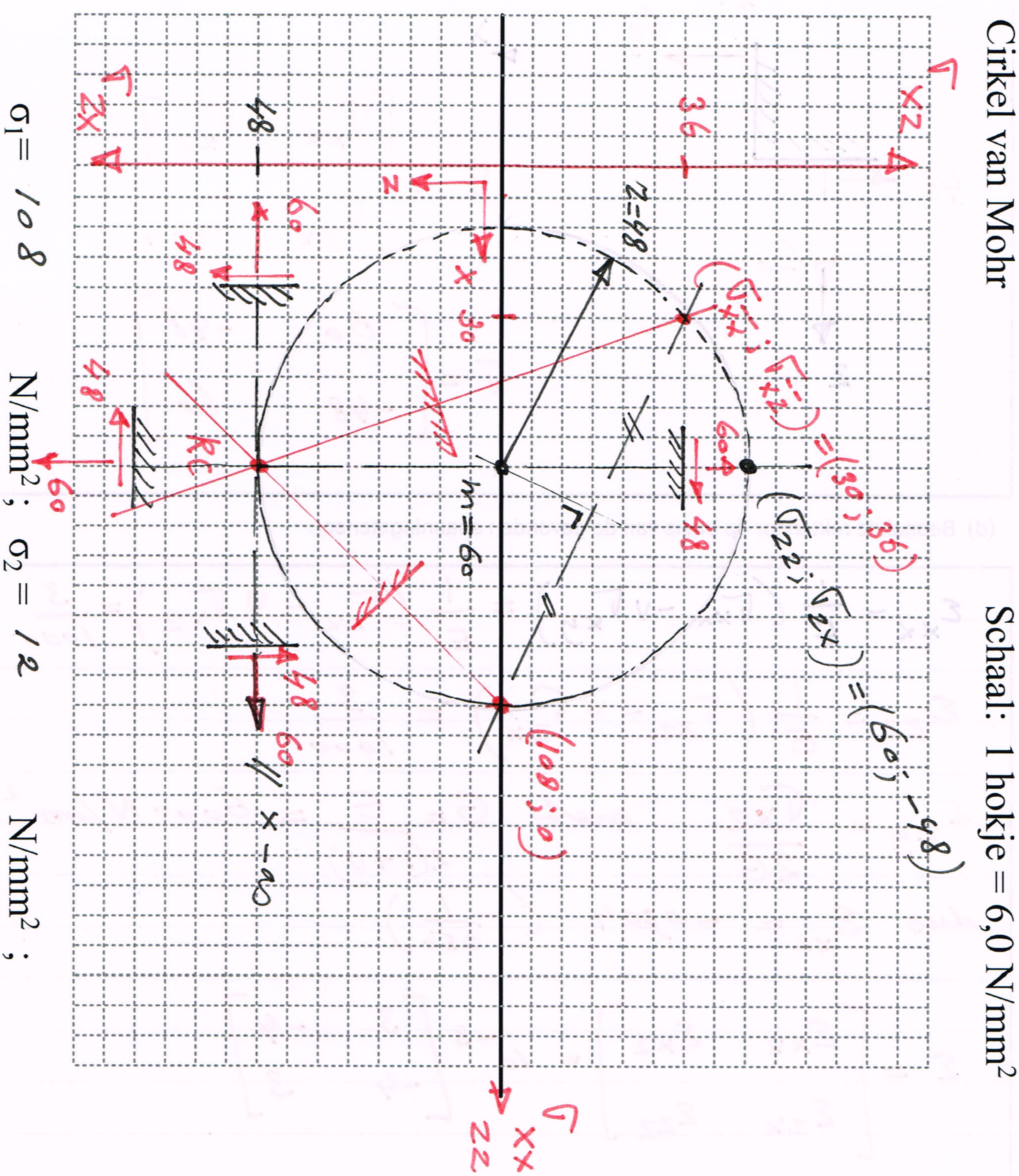
Opgave 5 : Elasticiteitstheorie

(a) Wat houdt een homogene isotrope spanningssituatie in?

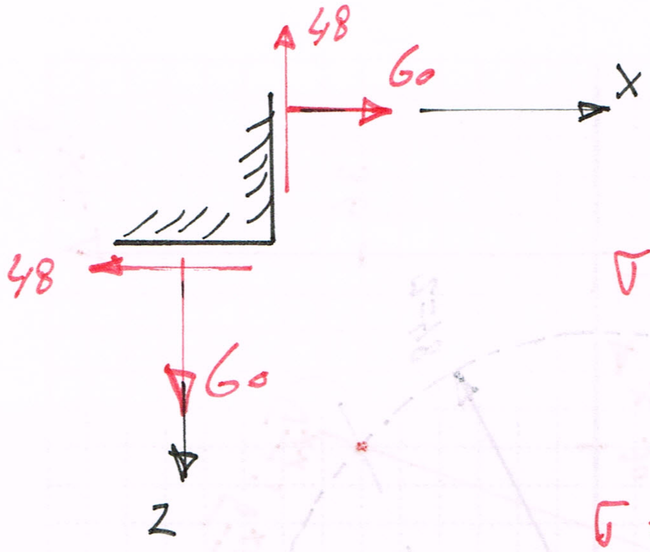
homogeen: het materiaal is op iedere plaats gelijk (identieke eigenschappen)

isotroop: het materiaal heeft in alle richtingen dezelfde eigenschappen

(b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het richtingencentrum en de hoofdrichtingen en hoofdspanningen aan. Bepaal de hoofdspanningen m.b.v. een berekening op basis van de cirkelinformatie en geef de getalswaarden op 1 decimaal aan in de tekening. (draai dit blad linksom)



(c) Bepaal met de cirkel van Mohr de spanningstensor en teken de spanningen op de vlakjes zoals deze in werkelijkheid werken en zet de getalswaarde erbij.



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 60 & -48 \\ -48 & 60 \end{bmatrix}$$

(d) Bepaal de rektensor op basis van de gevonden spanningstensor.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xy}\right) = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xz}\right) = \frac{3}{1000}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{zx}\right) = \frac{3}{1000}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \quad \text{met} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 6000\ N/mm^2$$

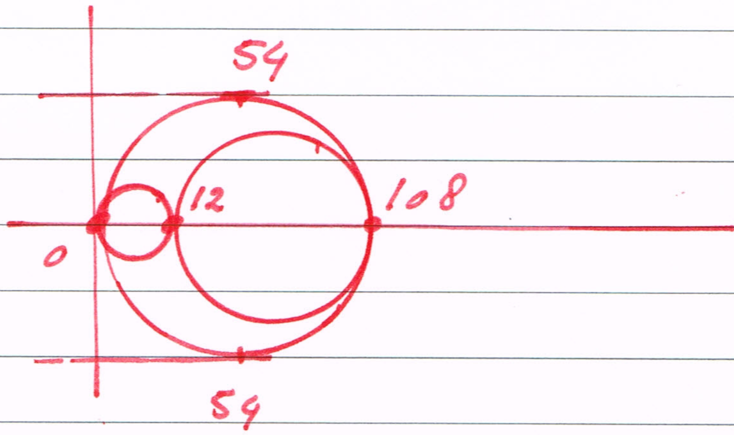
$$\text{dus} \quad \varepsilon_{xz} = -0{,}004 \quad \left(-\frac{1}{250}\right)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(e) Bepaal de veiligheidsfactor van de gegeven spanningstoestand op basis van het criterium van Tresca.

grootste cirkel is maatgevend:

diameter $= 108 \ N/mm^2$



criterium $\gamma \cdot 108 \leq f_y = 115$

$\gamma = \frac{115}{108} = 1{,}06$ (veilig met kleine marge!)

TU Delft Subfaculteit Civiele Techniek
Constructiemechanica

Vermeld op bladen van uw werk:
STUDIENUMMER :
NAAM :

Hertentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

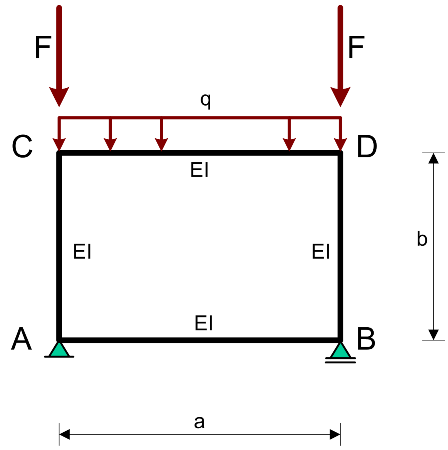
15 April 2013
14:00 – 17:00 uur

Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **4** vraagstukken
- Werk elk vraagstuk uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen, PDA's en andere gadgets met al dan niet UMTS en/of bluetooth-verbinding mogen niet aan staan tijdens het tentamen en ook niet op de tafels liggen
- Maak gebruik van de bijgeleverde formulebladen
- Gebruik geen rode pen of rood potlood
- Het gebruik van woordenboeken en (grafische) rekenmachines is toegestaan

VRAAGSTUK 1: Statisch onbepaalde constructies en knik (ca 60 min)

Onderstaande symmetrische raamwerkconstructie wordt symmetrisch belast met twee puntlasten en een gelijkmatig verdeelde belasting op de bovenregel. Alle buigstijfheden zijn *EI*. De staven zijn momentvast met elkaar verbonden. De vragen hebben betrekking op zowel de krachtsverdeling als knik.



$$\textit{Gegeven}: a = 6{,}0\text{ m};\quad b = 6{,}0\text{ m};\quad q = 8\text{ kN/m};\quad F = 15{,}0\text{ kN};\quad EI = 1000\text{ kNm}^2$$

Vragen:

a) Beschrijf de oplossingsstrategie die U kiest om de krachtsverdeling in deze constructie te bepalen.

TIP:
U mag daarbij van alle handigheidjes en vooraf voor u bekende inzichten gebruik maken, zodat het aantal onbekenden zoveel mogelijk gereduceerd wordt.

b) Welke invloed hebben de puntlasten op de momentenverdeling?
c) Werk de door U gekozen methode uit en los de onbekenden op.
d) Teken de momentenlijn en dwarskrachtenlijn voor de gehele constructie.
e) Schets hoe de momentenlijn verandert afhankelijk van de *a/b* verhouding.

TIP:
Neem de *a* als vaste waarde en laat *b* variëren, ga niet rekenen maar laat kwalitatief zien wat de invloed is op de momentenlijn m.b.v. schetsjes.

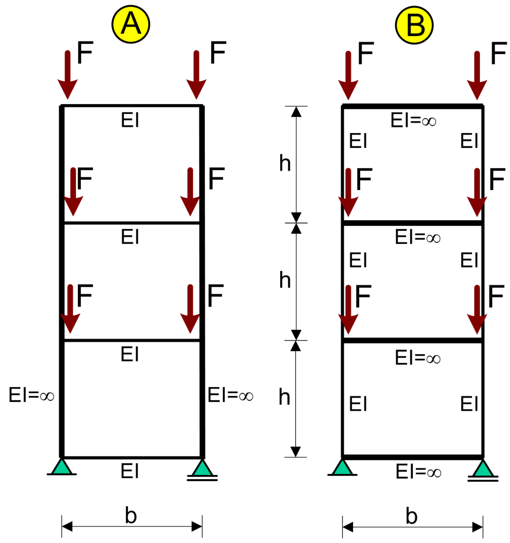
f) Hoe groot kan het moment in de bovenregel maximaal worden t.p.v. de knopen als de *b* waarde variabel is?
g) Leg kort in woorden uit wat er verandert in uw aanpak indien er alleen één puntlast op 1/3 van de overspanning *a* op de bovenregel aangrijpt?

Er wordt gekozen voor een vierkant raamwerk met *a* = *b* = 6,0 m.

h) Schets de knikvorm en bepaal de kniklast en kniklengte van de linker kolom.
i) Bepaal de maximale grootte van de puntlast als de kniklast van de kolom maatgevend is.
j) Hoe groot is de vergrotingsfactor?

VRAAGSTUK 2: Stabiliteit   (ca 30 min)

Van de twee onderstaande (educatieve) constructies A en B worden de kolommen per verdieping centrisch belast met de aangegeven puntlasten *F*. Gevraagd wordt een stabiliteitsonderzoek te verrichten. In geval A zijn de kolommen oneindig stijf en hebben de regels een buigstijfheid *EI*. Voor constructie B is dit precies omgekeerd. Alle kolom-regel aansluitingen zijn volkomen stijf uitgevoerd.



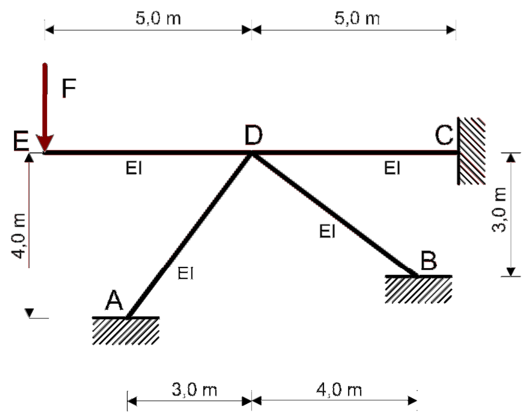
Gegevens : EI =16000 kNm^2; h = 4 m; b = 2 m;

Vragen:

a) Teken beide constructies in de verplaatste stand.
b) Bepaal voor zowel constructie A als B de kritieke last *F* waarbij het evenwicht van de constructie instabiel wordt.
c) Stel dat de onderste regel niet momentvast maar scharnierend is verbonden met de kolommen, hoe verandert dan de kritieke last voor constructie A en B?

VRAAGSTUK 3: Verplaatsingenmethode (ca 30 min)

Onderstaande raamwerkconstructie wordt belast met een puntlast in E. Alle staven met buigstijfheid *EI* zijn momentvast met elkaar verbonden in D en de invloed van de normaalkrachtvervorming kan worden verwaarloosd. Gevraagd wordt de krachtsverdeling te bepalen met behulp van de verplaatsingenmethode.



Gegeven : $F = 30,0$ kN; $EI = 12500$ kNm^2

Vragen:

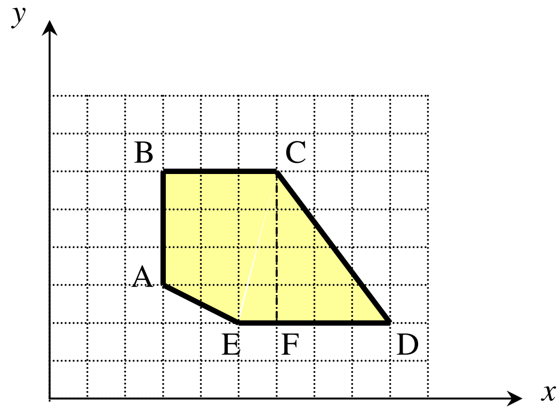
a) Beschrijf de oplossingsstrategie volgens de verplaatsingen methode en geef aan wat uw fundamentele onbekende(n) zijn.
b) Los de onbekende(n) op.
c) Teken de momentenlijn van de gehele constructie inclusief de vervormingstekens en schrijf de waarden erbij.
d) Bepaal de zakking van punt E.

VRAAGSTUK 4 : Elasticiteitstheorie (ca 45 min)

Van een plaat in een homogene isotrope vlakspanningstoestand zijn de randen in het vlak belast. Voor de aanduiding van de spanningen wordt gebruik gemaakt van een lokale x-as die samenvalt met de uitwendige normaal van het oppervlak:

- Normaalspanning op BC (en daarmee ED) is gelijk aan -16 N/mm^2
- Schuifspanning op AB is gelijk aan +6 N/mm^2
- Op rand DC is de normaalspanning gelijk aan 0

Het proefstuk met dikte t is gemaakt van een materiaal waarvan het vloeigedrag goed te beschrijven is met de vloeivoorwaarde van Tresca.



Cirkel van Mohr
In verband met de getalswaarden is het belangrijk de cirkels zo nauwkeurig mogelijk te tekenen dus gebruik een scherp potlood. Eventuele kleine afwijkingen zijn onvermijdelijk maar de docent zal daar rekening mee houden bij de beoordeling.

Gegevens: $E = 20000$ N/mm^2; $\nu = 0,4$; $f_y = 28$ N/mm^2

Vragen:

a) Toon aan dat op basis van het krachtenevenwicht, de ontbrekende spanning op rand CD in absolute zin 6 N/mm^2 is.

TIP : maak gebruik van uw basiskennis en zo mogelijk de kleine driehoek CDF.

b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen. Geef duidelijk aan waar het middelpunt en het richtingencentrum ligt en schrijf de waarden erbij. Kies zelf een geschikte schaal en geef duidelijk de hoofdrichtingen en hoofdspanningen aan.

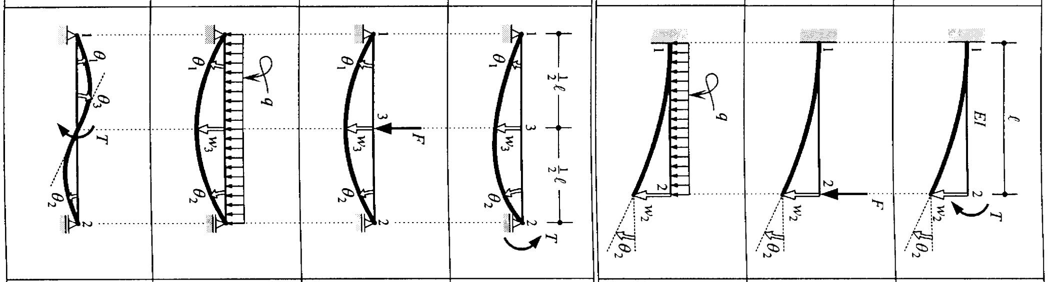
c) Bepaal de spanningen op vlakje AE en geef aan welke richting deze spanningen hebben.

d) Teken de cirkel van Mohr voor de rekken. Geef duidelijk aan waar het richtingencentrum ligt en bepaal de hoofdrekken. Kies zelf een geschikte schaal.

e) Geef de richting aan van de vezel met de in absolute zin grootste rek.

f) Bepaal voor de gegeven spanningstoestand de veiligheid op basis van het vloeicriterium van Tresca.

FORMULEBLAD

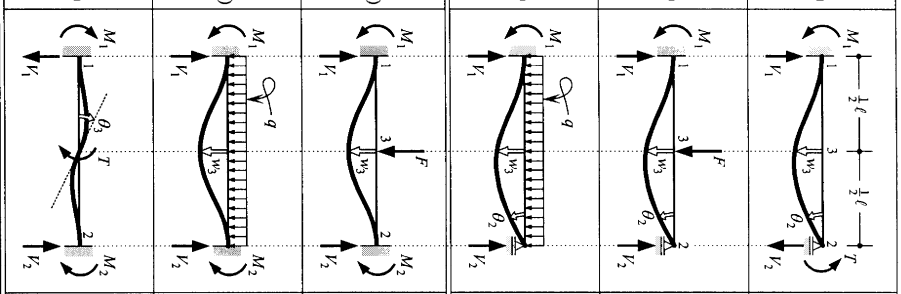


(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$

vergeet-mij-nietjes

(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)



statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\tfrac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \tfrac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_\text{k}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_\text{k} = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}} \quad \text{met}: \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \qquad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \qquad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha\cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_\text{k} = \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2-4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met}: \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \dfrac{10}{\rho_1};\ \rho_1 = \dfrac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \dfrac{10}{\rho_2};\ \rho_2 = \dfrac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met}: \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

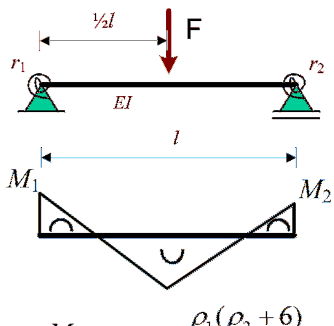
Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte *h* van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

VGN voor verend ingeklemde statisch onbepaalde ligger



$$\rho_1 = \frac{r_1 l}{EI}; \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI};$$

$$M_1 = \frac{\rho_1(\rho_2+6)}{8\rho_1(\rho_2+4)+32(\rho_2+3)} Fl$$

$$M_2 = \frac{\rho_2(\rho_1+6)}{8\rho_2(\rho_1+4)+32(\rho_1+3)} Fl$$

BEKNOPTE UITWERKING MET ANTWOORDEN

Vraagstuk 1 : Statisch onbepaalde constructies en knik

a) De constructie is symmetrisch en wordt symmetrisch belast. Hoewel dit een ongeschoorde constructie is, zal er geen horizontale verplaatsing van de bovenregel optreden. De momenten in A zijn gelijk aan die in B en de momenten in C zijn gelijk aan die in D. Neem negatieve momenten (trek aan de bovenzijde) aan in de hoekpunten van de regels:

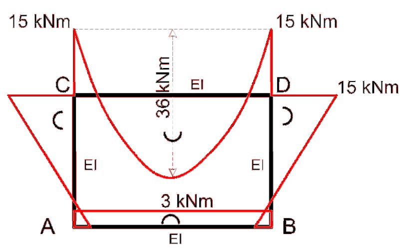
$$\varphi_A^{AB} = \varphi_A^{AC} \qquad \frac{M_A a}{3EI} + \frac{M_A a}{6EI} = -\frac{M_A b}{3EI} + \frac{M_C b}{6EI}$$

$$\varphi_A^{AB} = \varphi_A^{AC} \qquad \frac{M_A b}{6EI} - \frac{M_C b}{3EI} = \frac{M_C a}{3EI} + \frac{M_C a}{6EI} - \frac{qa^3}{24EI}$$

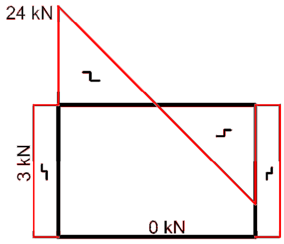
b) De puntlasten hebben geen invloed op de momentenverdeling aangezien de knopen niet verplaatsen en normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.

c) Oplossen levert: $M_A = M_B = \;\; 3{,}0\text{ kNm}; \quad M_C = M_D = 15{,}0\text{ kNm}$

d) M- en V-lijn:



M-lijn



V-lijn

e) Zie diktaat en sheets, beschrijf stijfheidsinvloed van de kolom op de M-verdeling.

f) Maximaal moment in de hoekpunten als de bovenregel wordt beschouwd als een ligger die volledig is ingeklemd (starre kolommen). Op basis van *vergeet-mij-nietje* geldt:

$$M_C = \tfrac{1}{12} qa^2 = 24{,}0\text{ kNm} \qquad \text{(huidige situatie is 62,5\% van deze starre oplossing)}$$

g) De constructie wordt nu niet meer symmetrisch belast. De ongeschoorde constructie zal in C en D horizontaal willen verplaatsen. Pas de hybride oplossingsmethode toe waarbij in alle starre verbindingen tussen de staven scharnieren met overgangsmomenten worden aangenomen. Er ontstaat nu een mechanisme met één vrijheidsgraad. De vijf onbekenden kunnen worden opgelost met vier hoekveranderingsvoorwaarden en een vergelijking voor het evenwicht in de vorm van virtuele arbeid.

h) Ongeschoord raamwerk dus de ongeschoorde situatie is voor knik maatgevend. De beide horizontale regels vormen weerstand tegen het uitknikken van de kolom. De rotatieveerstijfheid van deze regels is (ongeschoorde uitbuigingsvorm) $r = 6EI/a = 1000$ kNm/rad. De kniklast van de kolom wordt hiermee (eta-formule) 149,5 kN. De kniklengte volgt uit de formule van Euler en is $l_k = \sqrt{66} = 8{,}12\text{ m}$.

i) De normaalkracht N in kN in de kolom is gelijk aan 24 + F. Hieruit volgt een maximale grootte voor de puntlast van 125,5 kN.

j) Voor F = 15 kN geldt een vergrotingsfactor op basis van N in de kolom van:

$$n = \frac{149{,}5}{15+24} = 3{,}83 \qquad \frac{n}{n-1} = 1{,}35 \qquad \text{(invloed van 2}^\text{e}\text{ orde effect is aanzienlijk)}$$

Vraagstuk 2 : Stabiliteit van het evenwicht

a) Zowel constructie A als B zijn ongeschoord. Teken de constructie zijdelings verplaatst waarbij voor A de gehele constructie scheef komt te staan en voor B alleen de onderste kolom (zwaarst belast) zal uitknikken en zijdelings verplaatsen, de rest van de constructie blijft onvervormd.

b) Zet constructie A (*starre* kolom) in de verplaatste stand, maak de linker en rechter kolom vrij door de regels door te knippen (COZ-sommetje). Er ontstaan twee vrijgemaakte lichamen. Van de interactiekrachten spelen alleen de momenten in de liggers een rol in de evenwichtsvergelijking (N en V vallen weg). Na vereenvoudigen wordt gevonden:

$$F \times h\theta + F \times 2h\theta + F \times 3h\theta - 4M_{regel} = 0 \quad \text{met:} \quad M_{regel} = \frac{6EI}{b}\theta$$

$$6hF = \frac{24EI}{b} \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{4EI}{bh} = 8000 \text{ kN}$$

Zet constructie B in de verplaatste stand (*buigzame* op druk belaste kolom) waarbij de *ongeschoorde* situatie maatgevend zal zijn. De kniklengte van de kolom is gelijk aan h (basisgeval Euler). De onderste kolom is maatgevend met de grootste normaalkracht van $3F$:

$$3F = \frac{\pi^2 EI}{h^2} \cong \frac{10 \times 16000}{16} = 10000 \text{ kN}$$

$$F = 3333 \text{ kN}$$

c) Voor constructie A geldt nu:

$$F \times h\theta + F \times 2h\theta + F \times 3h\theta - 3M_{regel} = 0 \quad \text{met:} \quad M_{regel} = \frac{6EI}{b}\theta$$

$$6hF = \frac{18EI}{b} \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{3EI}{bh} = 6000 \text{ kN}$$

Voor constructie B geldt nu dat de basisknikvorm moet worden aangepast. De kniklengte neemt toe tot $2h$ (*ongeschoorde situatie*) waardoor de knikkracht afneemt.

$$3F = \frac{\pi^2 EI}{(2h)^2} \cong \frac{10 \times 16000}{4 \times 16} = 2500 \text{ kN}$$

$$F = 833 \text{ kN}$$

Opmerking:

Een starre kolom toetsen m.b.v. een knikformule op basis van buigingsknik (Euler) wordt niet gewaardeerd. De verende werking van de buigzame regels volgt uit een basisgeval, zie leermiddel en de vele COZ-opgaven. Fouten hierin worden zwaar aangerekend.

Vraagstuk 3 : Verplaatsingenmethode

a) Haal het overstek weg door de kracht te verplaatsen naar D onder toevoeging van een koppel. Van de resterende constructie met *niet-verplaatsbare* knopen is de fundamentele onbekende de *rotatie van knoop D*. De noodzakelijke *evenwichtsvergelijking* is het momentenevenwicht van de knoop. Druk alle staafmomenten uit in de onbekende verplaatsingsgrootheid (vrijheidsgraad). Geef een schets met de relevante gegevens t.a.v. onbekende staafmomenten , de belasting en de vrijheidsgraad.

b) Er resteert: $5F = 3\times\dfrac{4EI}{5}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \dfrac{25}{12}\dfrac{F}{EI} = 0{,}005 \text{ rad}$.

Er werd uitdrukkelijk gevraagd om dit probleem op te lossen met de *verplaatsingenmethode*. Ga dus niet beginnen met *vormveranderingsvoorwaarden* want dan ken je het onderscheid niet tussen de *krachtenmethode* en de *verplaatsingenmethode*.

Merk op:
De staven DA, DB en DC zijn identiek. Feitelijk is al te voorspellen dat iedere staaf 1/3 van het uitwendige koppel moet opnemen. De 150 kNm uit het overstek wordt dus verdeeld over de drie staven, elk 50 kNm.

c) De momenten in de staafuiteinden nabij knoop D zijn voor de staven DA, DB en DC gelijk aan : $M = \dfrac{4EI}{5}\times 0{,}005 = 50 \text{ kNm}$. Het inklemmingsmoment is dan gelijk aan de helft van dit eindmoment, 25 kNm (basis geval zie *vergeet-mij-nietjes*). Teken op basis hiervan snel de momentenlijn inclusief de vervormingstekens en vergeet het overstek niet. Verdere uitwerking wordt hier niet gegeven, zelf doen!

d) De zakking in E volgt uit het kwispeleffect van ED t.g.v. de rotatie van knoop D plus de buigvervorming in staaf ED:

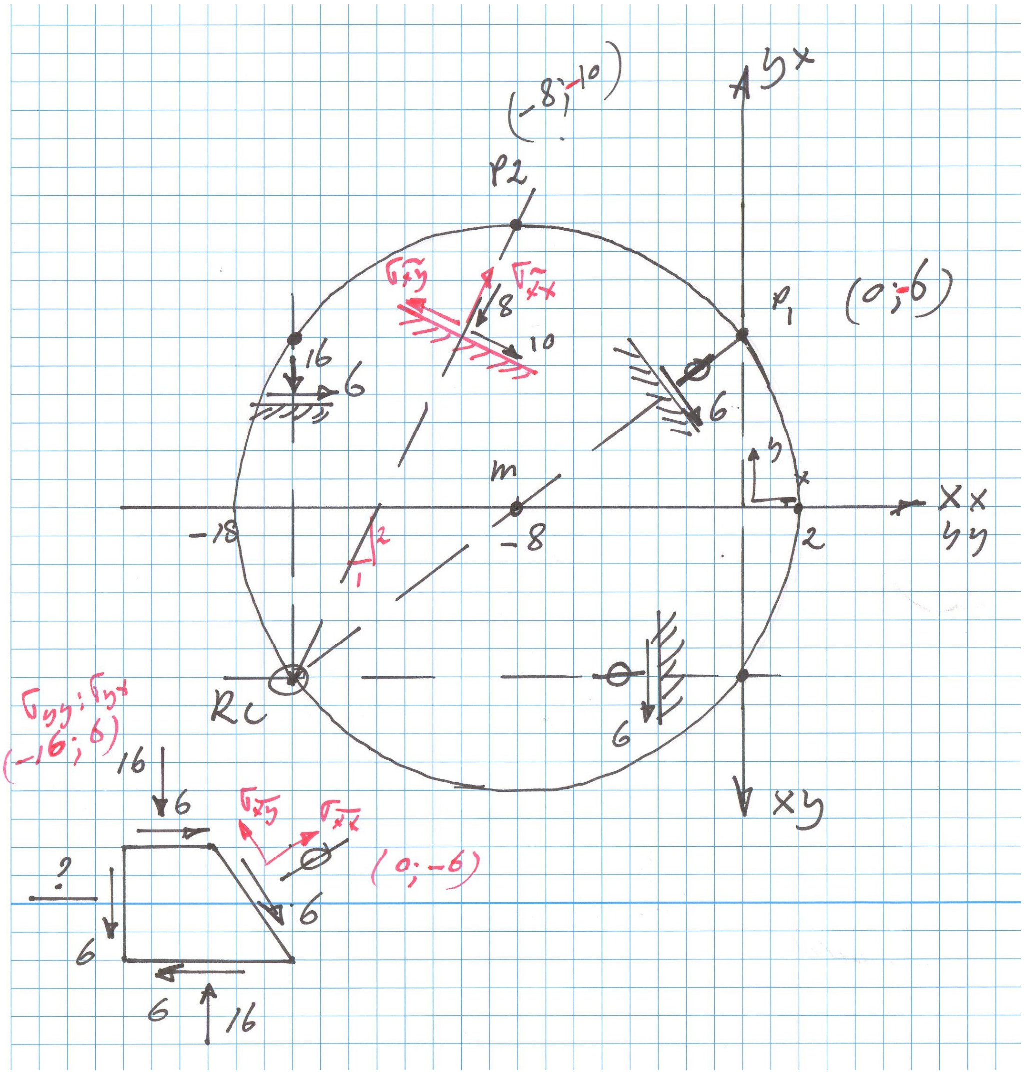
$$w_E = 0{,}005\times 5{,}0 + \frac{30\times 5{,}0^3}{3\times 12500} = 0{,}125 \text{ m}$$

<u>Opmerking</u>
In de uitwerking worden fouten niet op prijs gesteld. De opgave was dermate doorzichtig dat de resultaten eenvoudig te controleren waren m.b.v. fysische intuïtie. Ook het vergeten van het kwispel-effect wordt niet gewaardeerd. De voorkennis van ConstructieMechanica 2 is en blijft belangrijk en moet onderhouden worden en wordt daarom ook nadrukkelijk bij ConstructieMechanica 3 getoetst.

Vraagstuk 4 : Elasticiteitstheorie

a) Maak de driehoek CDF vrij en teken alle bekende spanningen zoals ze in werkelijkheid werken. De schuifspanning op FD en FC is even groot op basis van momentenevenwicht (1e jaar). Schuifspanningen op onderling loodrechte vlakken werken naar elkaar toe of van elkaar af. De enige onbekende is de schuifspanning op CD. Uit horizontaal of verticaal *krachtenevenwicht* volgt dat de schuifspanning op CD 6,0 N/mm^2 is en de richting heeft van C naar D. **Let op, eerst resulterende krachten bepalen!**

b) Met de bekende spanningen op twee vlakjes (BC en CD) kunnen twee punten worden getekend van de cirkel van Mohr.



c) Op vlakje AE werken de spanningen zoals hierboven aangegeven.

d) Van spanningen naar rekken kan op basis van de spanningstensor of op basis van de hoodspanningen. Beide routes leiden uiteraard tot dezelfde cirkel met hoofdrekken $\varepsilon_1 = 4,6\times10^{-4}$; $\varepsilon_2 = -9,4\times10^{-4}$. Het RC ligt verhoudingsgewijs op dezelfde plaats in de cirkel aangezien de hoofrekrichting gelijk is aan de hoofdspanningsrichting (homogeen LE-materiaal). Tekening hier achterwege gelaten.

e) Vezels die de richting hebben met de verhouding 1 naar rechts en 3 eenheden omlaag hebben een rek die gelijk is aan de hoofdrek 2. Tekening is hier achterwege gelaten.

f) De veiligheid volgens Tresca volgt uit de grootste spanningscirkel. De diameter is 20 N/mm^2. Hieruit volgt voor de veiligheid : 28/20 = 1,4.

Subfaculteit Civiele Techniek
Constructiemechanica

Vermeld op bladen van uw werk:
STUDIENUMMER :
NAAM :

Tentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

21 Januari 2013 van 14:00 – 17:00 uur

Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **4 vraagstukken**.
- Werk elk vraagstuk uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen, PDA's en andere gadgets met al dan niet UMTS en/of bluetooth-verbinding mogen niet aan staan tijdens het tentamen en ook niet op de tafels liggen
- Maak gebruik van de bijgeleverde formulebladen
- Gebruik geen rode pen of rood potlood
- Het gebruik van woordenboeken en (grafische) rekenmachines is toegestaan

VRAAGSTUK 1 : Theorie (ca 45 min)

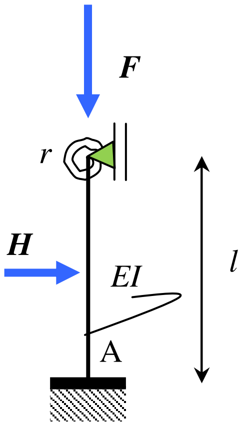
Onderdeel 1

Van een homogene vlakspanningstoestand worden m.b.v. rekstrookjes rekken gemeten in de richting van de rekstrookjes. Van het te onderzoeken materiaal is de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractie coëfficiënt bekend.

a) Wat is het minimum aantal rekstrookjes dat nodig is om de spanningstensor te kunnen bepalen?
b) Hoe worden de rekstrookjes ten opzichte van elkaar geplaatst?

Onderdeel 2

Van een buigzame op druk belaste staaf is hieronder de schematisatie weergegeven. De staaf is aan een zijde volledig ingeklemd en aan de andere zijde verend ingeklemd d.m.v. een rotatieveer.



c) Geef de grenzen aan waartussen de kniklengte van de op druk belaste buigzame staaf moet liggen.

d) Wat is uw oordeel over de onderstaande stellingen en motiveer uw antwoord in één of twee zinnen:

1) Het 2^e orde inklemmingsmoment kan exact worden bepaald m.b.v. de vergrotingsfactor en het 1^e orde inklemmingsmoment.

2) Er is voor dit probleem een gesloten uitdrukking te bepalen voor de kniklast.

Onderdeel 3

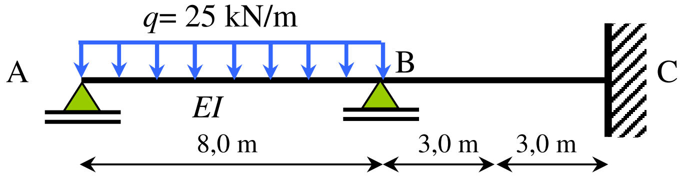
Een doorgaande vloer van een parkeerdek in een parkeergarage wordt belast door een temperatuurbelasting vanwege een brand op het onderliggende parkeerdek. We gaan er gemakshalve van uit dat de temperatuurbelasting gelijkmatig verdeeld is voor de gehele doorgaande ligger.

e) Laat zien m.b.v. een schets voor een aantal velden (meer dan 3) hoe de vrije vervorming van de vloer wordt verhinderd.
f) Laat duidelijk zien welke momenten hierdoor ontstaan en schets op basis hiervan de momentenlijn voor uw doorgaande ligger.

Onderdeel 4

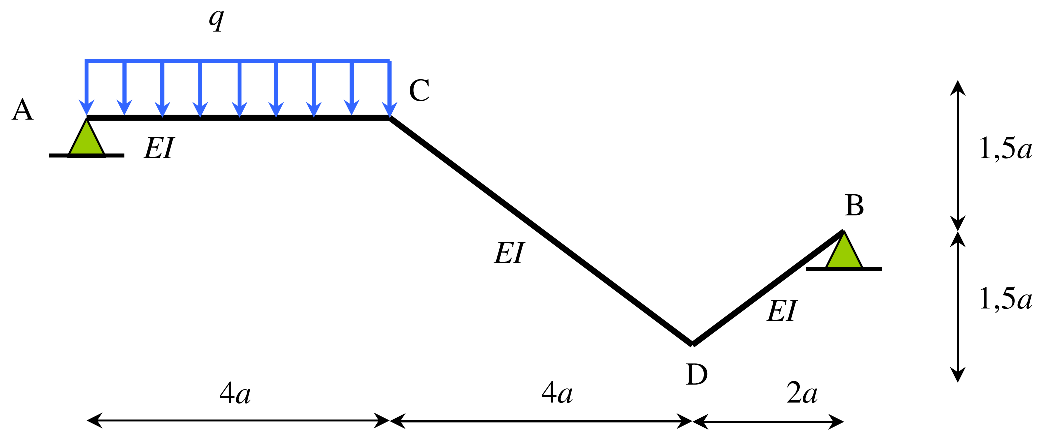
Analyseer de statisch onbepaalde ligger met buigstijfheid *EI*.

g) Bepaal de plaats en de grootte van het maximale veldmoment in veld AB.



VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies (ca 45 min)

Een raamwerkconstructie wordt over het deel AC belast met een gelijkmatig verdeelde belasting q. Alle staven hebben een gelijke buigstijfheid zoals in de figuur is aangegeven. In C en D zijn de aansluitende staven momentvast met elkaar verbonden. De invloed van de normaalkracht-vervorming mag worden verwaarloosd. De krachtsverdeling in de constructie moet worden bepaald met behulp van de hybride krachtenmethode.



Gegevens : $a = 1$ m; $q = 41$ kN/m; $EI = 10000$ kNm^2

Vragen:

a) Analyseer de constructie en beschrijf kort hoe u de krachtsverdeling gaat bepalen. Ondersteun uw betoog met schetsjes waaruit duidelijk blijkt wat uw (positieve) aannamen zijn.

b) Stel alle noodzakelijke voorwaarden op en bepaal uw onbekenden. U mag gebruik maken van de GR om het probleem zo snel mogelijk op te lossen. Geef dan wel overzichtelijk weer welke vergelijkingen er worden opgelost en wat het antwoord uit de GR is.

c) Teken de M- en V-lijn inclusief de vervormingstekens en zet de karakteristieke waarden erbij.

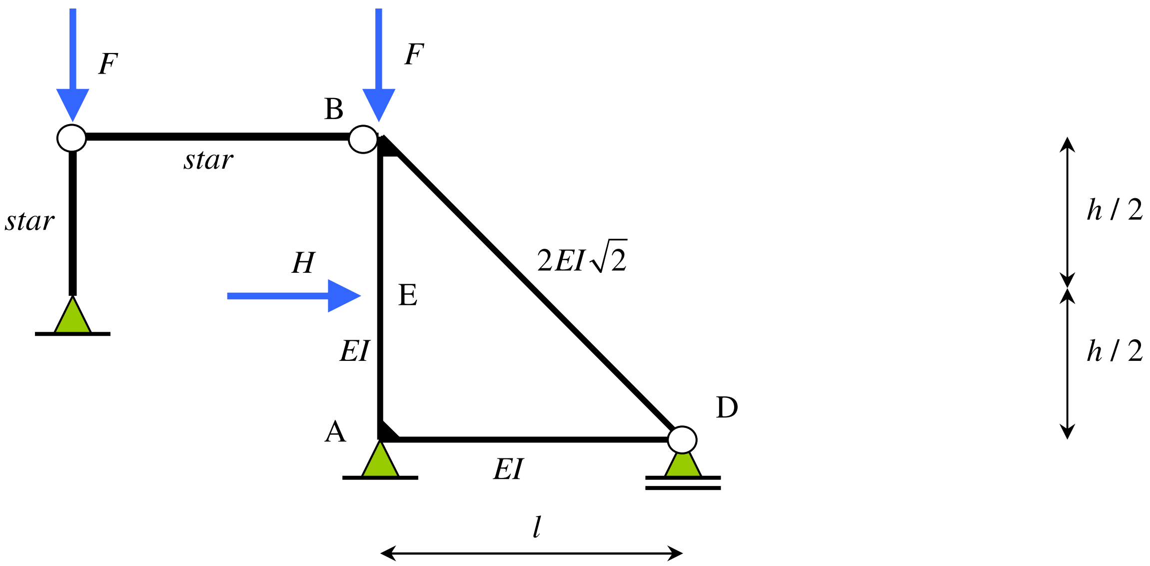
☺ Ter controle :
- Het grootste moment in staaf CD is in absolute zin gelijk aan 208 kNm.
- Het grootste moment in staaf BD is in absolute zin 32 kNm.

d) Bepaal de oplegreacties in B.

e) Hoe groot is de horizontale verplaatsing van punt D?

VRAAGSTUK 3 : Stabiliteit (ca 45 min)

Van de onderstaande (educatieve) constructie wordt gevraagd een stabiliteitsonderzoek te verrichten. Let op de aangegeven buigstijfheden van de afzonderlijke staven en de positionering van de scharnieren. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. De kracht H is een constante kracht, de verticale puntlast F kan variëren. Ons onderzoek is gericht op met name staaf AB.



Gegevens : $EI = 1000\ \text{kNm}^2$; $h = 4$ m; $l = 4$ m; $F = 100$ kN; $H = 88$ kN

TIP : Maak zo nodig gebruik van de formules op het formuleblad.

Vragen:

a) Bepaal van deze constructie de 1e orde momentenverdeling en toon daarbij aan dat voor het moment in E, in absolute zin, geldt:

$$M_E = 58\ \text{kNm}$$

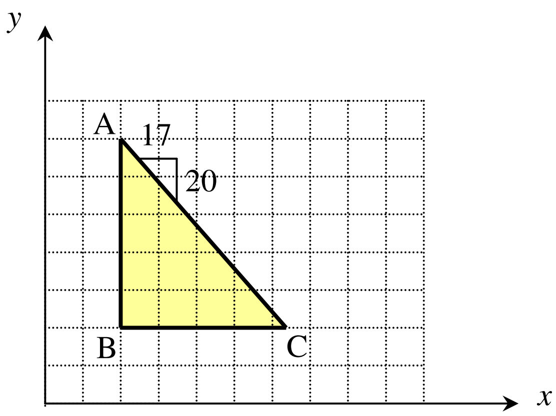
b) Bepaal de 1e orde verplaatsing in E.
c) Bepaal de 1e orde dwarskracht in staaf BD.
d) Geef het model weer waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.
e) Bepaal de kniklast F_k van deze constructie.
f) Geef een afschatting van de tweede orde uitbuiging van deze constructie in E.
g) Bepaal de 2e orde dwarskracht in staaf BD.

VRAAGSTUK 4 : Elasticiteitstheorie (ca 45 min)

Van een plaat in een homogene isotrope vlakspanningstoestand zijn de randen ABC belast. Van twee vlakken zijn de spanningen bekend. Voor de aanduiding van de spanningen wordt gebruik gemaakt van een lokale *x*-as die samenvalt met de uitwendige normaal van het oppervlak:

vlak AC : normaalspanning +8,5 N/mm^2, schuifspanning -6,0 N/mm^2
vlak BC : normaalspanning -1,5 N/mm^2, schuifspanning -2,5 N/mm^2

Het proefstuk is gemaakt van een materiaal waarvan het vloeigedrag goed te beschrijven is met de vloeivoorwaarde van von Mises. De helling van het vlak AC is in de figuur aangegeven.



Cirkel van Mohr
In verband met de getalswaarden is het belangrijk de cirkels zo nauwkeurig mogelijk te tekenen dus gebruik een scherp potlood. Eventuele kleine afwijkingen zijn onvermijdelijk maar de docent zal daar rekening mee houden bij de beoordeling.

Gegevens: $E = ?\ \text{N/mm}^2$; $\nu = ?$; $f_y = 10\ \text{N/mm}^2$

Vragen:

a) Teken de vlakken AC en BC en laat zien in welke richting de gegeven spanningen werken op deze vlakken.

b) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen. Geef duidelijk aan waar het middelpunt en het richtingencentrum ligt en schrijf de waarden erbij. Kies als een geschikte schaal 1 cm = 1 N/mm^2 en geef duidelijk de hoofdrichtingen en hoofdspanningen aan.

c) Bepaal met behulp van de cirkel van Mohr de spanningstensor in het *x*-*y*-assenstelsel.

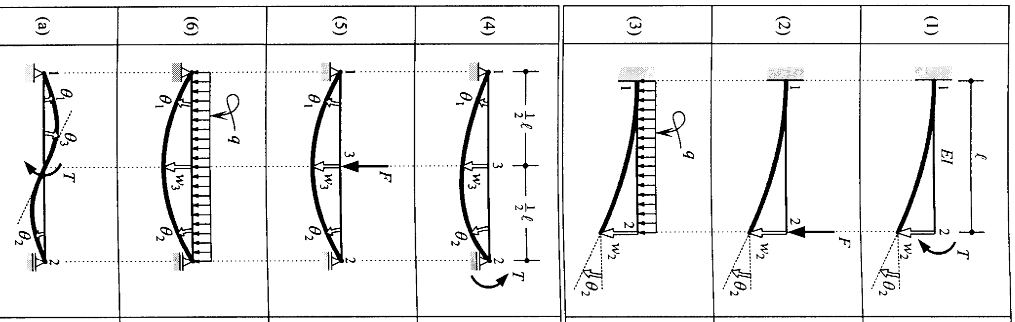
d) Bepaal de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoefficient als gegeven is dat geldt:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{3}{2000}; \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{1500}$$

e) Bepaal voor een vezelrichting die een hoek van 10,5° maakt met de *x*-as de rek.

f) Controleer de veiligheid van de gegeven spanningssituatie op basis van de vloeivoorwaarde van von Mises.

FORMULEBLAD



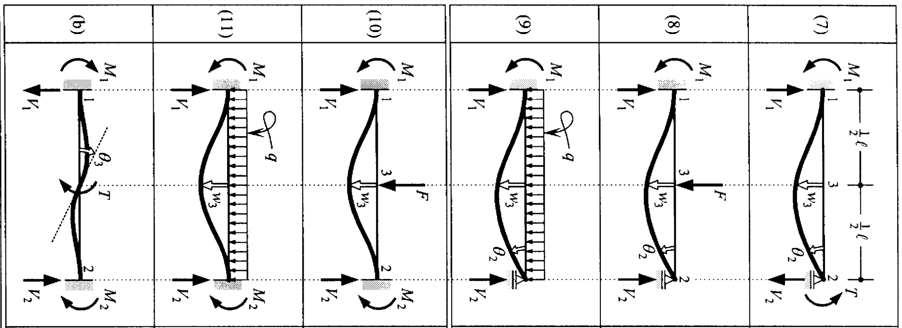
(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$

vergeet-mij-nietjes

(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI. T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting. M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_\mathrm{k}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \quad \Rightarrow \quad l_\mathrm{k} = l\sqrt{4 + \frac{10}{\rho}} \quad \text{met}: \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \qquad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \qquad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha \cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x\right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_\mathrm{k} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met}: \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \dfrac{10}{\rho_1}\,;\ \rho_1 = \dfrac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \dfrac{10}{\rho_2}\,;\ \rho_2 = \dfrac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met}: \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

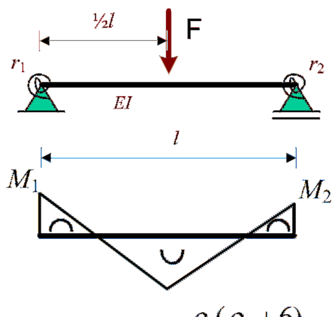
Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

VGN voor verend ingeklemde statisch onbepaalde ligger



$$\rho_1 = \frac{r_1 l}{EI}; \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI};$$

$$M_1 = \frac{\rho_1(\rho_2 + 6)}{8\rho_1(\rho_2 + 4) + 32(\rho_2 + 3)} Fl$$

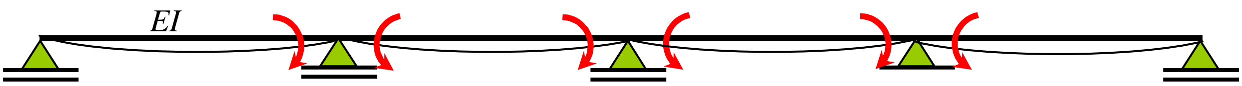
$$M_2 = \frac{\rho_2(\rho_1 + 6)}{8\rho_2(\rho_1 + 4) + 32(\rho_1 + 3)} Fl$$

UITWERKING MET ANTWOORDEN

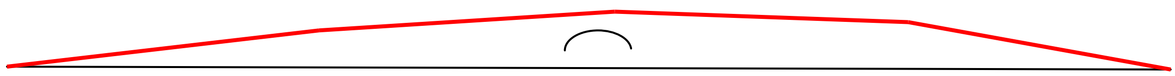
Opgave 1

a) Drie rekstrookjes
b) Onder hoeken van 45 graden
c) Tussen 0,5l en 0,7l (basisgevallen van Euler)
d) (1) : Nee de vergrotingsfactor is niet exact voor buigzame staven, wel een goede benadering
   (2) : De transcendente vergelijking waarmee de kniklast kan worden bepaald is geen gesloten uitdrukking. Een goede benadering levert wel een bruikbare gesloten formule op, de zogenaamde rho-formule van Newmark.

e) Teken de vervormde ligger, let op de temperatuur wordt aan de onderzijde verhoogd. De liggerdelen moeten boven de steunpunten zonder knikken aansluiten. Hiervoor zijn de getekende overgangsmomenten noodzakelijk. De richting van deze momenten kunnen worden gebruikt om de M-lijn te schetsen.



f) De momentenlijn <u>t.g.v. alleen de temperatuurbelasting</u> bestaat uit louter rechte stukken.



g) Bepaal eerst het steunpuntmoment in B:

$$\frac{ql_1^3}{24EI} - \frac{M_B l_1}{3EI} = \frac{M_B l_2}{3EI} - \frac{\frac{1}{2}M_B l_2}{6EI} \quad \Leftrightarrow \quad M_B = \frac{25 l_1^3}{2(4l_1 + 3l_2)} = 128 \text{ kNm}$$

Bepaal de oplegreactie in A:

$$A_v = \tfrac{1}{2} q l_1 - \frac{M_B}{l} = 84 \text{ kN} \uparrow$$

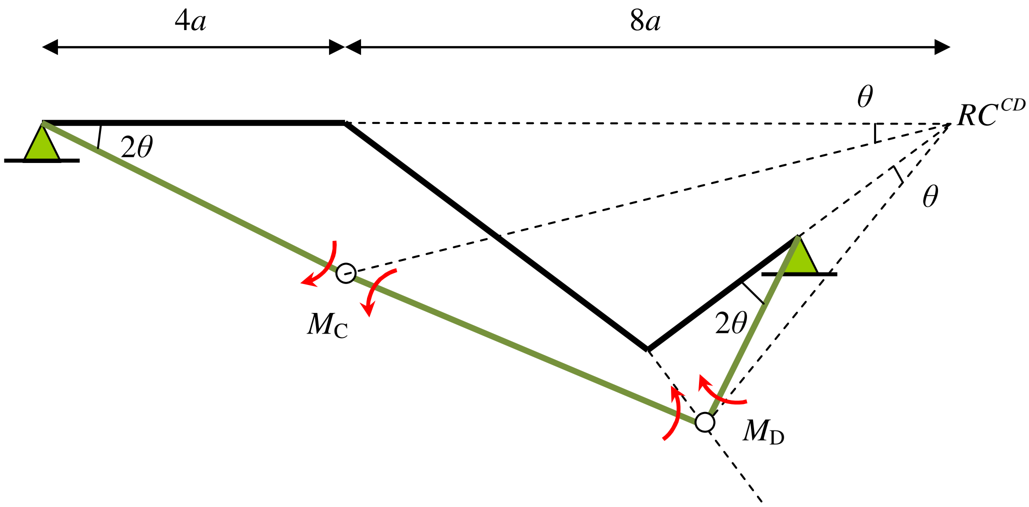
Hieruit volgt (gebruik oppervlak V-lijn) :

$$M_{\text{max - veld AB}} = \tfrac{1}{2} A_v \left(\frac{A_v}{q} \right) = 141{,}12 \text{ kNm}$$

Opgave 2

a) Dit is een constructie met verplaatsbare knopen. Door alle starre verbindingen te vervangen door scharnieren ontstaat een mechanisme met een vrijheidsgraad. Alle staven zullen roteren en deze starre rotatie wordt met de hybride methode meegenomen in de vormveranderingsvoorwaarden t.p.v. de staafaansluitingen. Met een extra evenwichtsvoorwaarde in de vorm van een virtuele arbeidsvergelijking kunnen de twee overgansmomenten en de vrijheidsgraad van het mechanisme (rotatie) worden opgelost.

Het mechanisme is hieronder getekend samen met de gekozen richtingen voor de overgangsmomenten.



b) De twee vormveranderingsvoorwaarden zijn en de virtuele arbeidsvergelijking zijn:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} \quad : \frac{q(4a)^3}{24EI} - \frac{M_C 4a}{3EI} - 2\theta = \frac{M_C 5a}{3EI} - \frac{M_D 5a}{6EI} + \theta$$

$$\varphi_D^{CD} = \varphi_D^{DB} \quad : -\frac{M_C 5a}{6EI} + \frac{M_D 5a}{3EI} + \theta = -\frac{M_D 2\tfrac{1}{2}a}{3EI} + 2\theta$$

$$\delta A = 0 \quad : M_C \times 2\delta\theta + M_C \times \delta\theta + M_D \times \delta\theta - M_D \times 2\delta\theta + 4aq \times 2a \times 2\delta\theta = 0$$

Na vereenvoudigen levert dit stelsel als oplossing:

$$M_C = -208 \text{ kNm}; M_D = 32 \text{ kNm}; \theta = \frac{19}{375} = 0{,}05067 \text{ rad}$$

c) De momentenlijn heeft een parabolisch verloop over AC en voor de rest een lineair verloop. De dwarskrachtenlijn volgt uit de helling van de momentenlijn. Hier mogen geen blunders in voorkomen. Let op de vervormingstekens en schrijf de waarden erbij.

d) Een mogelijke oplossingsroute:

a. Bepaal de verticale oplegreactie in A m.b.v. de momentensom om C voor het vrijgemaakte deel AC.
b. Door vervolgens de momentensom om B te bepalen van de gehele constructie wordt de horizontale oplegreactie in A gevonden.
c. Uit het horizontale en verticale evenwicht volgen de oplegreacties in B.

$B_V = 30 \text{ kN } (\uparrow); B_H = 18\tfrac{2}{3} \text{ kN } (\rightarrow)$

Merk op: In staaf DB treedt zowel N als V op (geen pendel). De N is te bepalen met de B_v en de V, deze N werd echter niet gevraagd.

e) De horizontale verplaatsing van D is $2\theta \times 1{,}5a = 0{,}076 \text{ m } (\rightarrow)$

Opgave 3

a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen (geschoord). Een eerste orde berekening houdt geen rekening met de invloed van de vervormde stand op het evenwicht. De verticale puntlasten kunnen daarom achterwege worden gelaten. Staaf AB is in feite verend ingeklemd in de staven AD en BD. Oplossen kan m.b.v. twee vormveranderingsvergelijkingen maar er kan ook gekozen worden om gebruik te maken van een *vergeet-mij-nietje* voor een statisch onbepaalde ligger zoals weergegeven op het laatste formuleblad. De rotatieveren zijn te vinden uit de verende werking van de delen BD en AD.

$$r_1 = \frac{3EI}{l}; \quad \rho_1 = \frac{r_1 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 3;$$

$$r_2 = \frac{3\left(2EI\sqrt{2}\right)}{l\sqrt{2}}; \quad \rho_2 = \frac{r_2 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 6;$$

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{\rho_1(\rho_2+6)}{8\rho_1(\rho_2+4)+32(\rho_2+3)} \times Hh = \frac{3\times 12}{8\times 3\times 10 + 32\times 9}\times 88\times 4 = 36 \text{ kNm}$$

$$M_{\mathrm{B}} = \frac{\rho_2(\rho_1+6)}{8\rho_2(\rho_1+4)+32(\rho_1+3)} \times Hh = \frac{6\times 9}{8\times 6\times 7 + 32\times 6}\times 88\times 4 = 24 \text{ kNm}$$

Het moment t.p.v. de horizontale puntlast van 88 kN wordt hiermee:

$$M_{\mathrm{E}} = \left| \frac{36+24}{2} - \tfrac{1}{4}\times 88\times 4 \right| = 58 \text{ kNm} \quad \text{(los dit grafisch op m.b.v. de } M\text{-lijn)}$$

b) De eerste orde verplaatsing in E levert alleen een horizontale verplaatsing op. Met behulp van de gegeven *vergeet-mij-nietjes* volgt hiervoor:

$$u = \frac{88\times 4^3}{48EI} - \frac{36\times 4^2}{16EI} - \frac{24\times 4^2}{16EI} = 0{,}0573 \text{ m} \quad (\rightarrow)$$

c) De 1^{e} orde dwarskracht van staaf BD volgt uit de helling van de M-lijn, deze is:

$$V = \frac{24}{4\sqrt{2}} = 4{,}24 \text{ kN} \quad \text{(de } V \text{ van de andere steunende staaf werd ook goedgekeurd)}$$

d) De bokconstructie is geschoord aangezien de invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. Staaf AB is daarom een geschoorde, aan twee zijden , verend ingeklemde staaf. De rho-formule is het model voor het bepalen van de kniklast.

e) De kniklast volgt uit:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)}\frac{\pi^2 EI}{h^2} = \frac{17}{8}\frac{\pi^2 EI}{h^2} = 1310 \text{ kN} \quad \left(\pi^2 = 10 \Rightarrow 1328 \text{ kN}\right)$$

f) De 2^{e} orde uitbuiging mag worden afgeschat met de vergrotingsfaktor. Hiervoor is de verticale belasting van belang die op de kolom AB werkt. Als punt B horizontaal zou kunnen verplaatsen moet de aanpendelende belasting in rekening worden gebracht. Echter er is gesteld dat de invloed van de normaalkrachtvervorming niet in beschouwing hoeft te worden genomen. De bokconstructie is vormvast en alle hoekpunten blijven daarom op een plaats. Dat betekent dat de starre kolom niet scheef kan gaan staan en waardoor de puntlast op deze starre kolom niet een horizontale kracht kan genereren die moet worden opgenomen in de vorm van extra verticale belasting op AB (de zgn aanpendelende belasting) . De vergrotingsfactor is daarom:

$$n = \frac{F_k}{F} = \frac{1300}{100} = 13 \quad \Rightarrow \frac{n}{n-1} = \frac{13}{12} = 1,083$$

$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,083 \times 0,057 = 0,062 \quad \text{m}$$

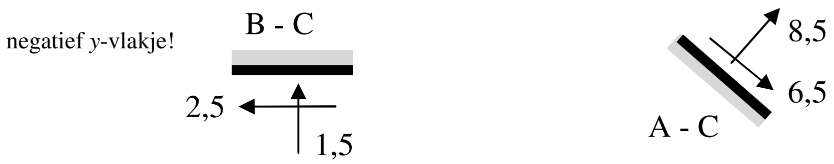
Fouten met de aanpendelende belasting werden door de vingers gezien aangezien dit aspect in deze toepassing redelijk verstopt was.

g) Hoewel niet exact, kan hier worden volstaan met:

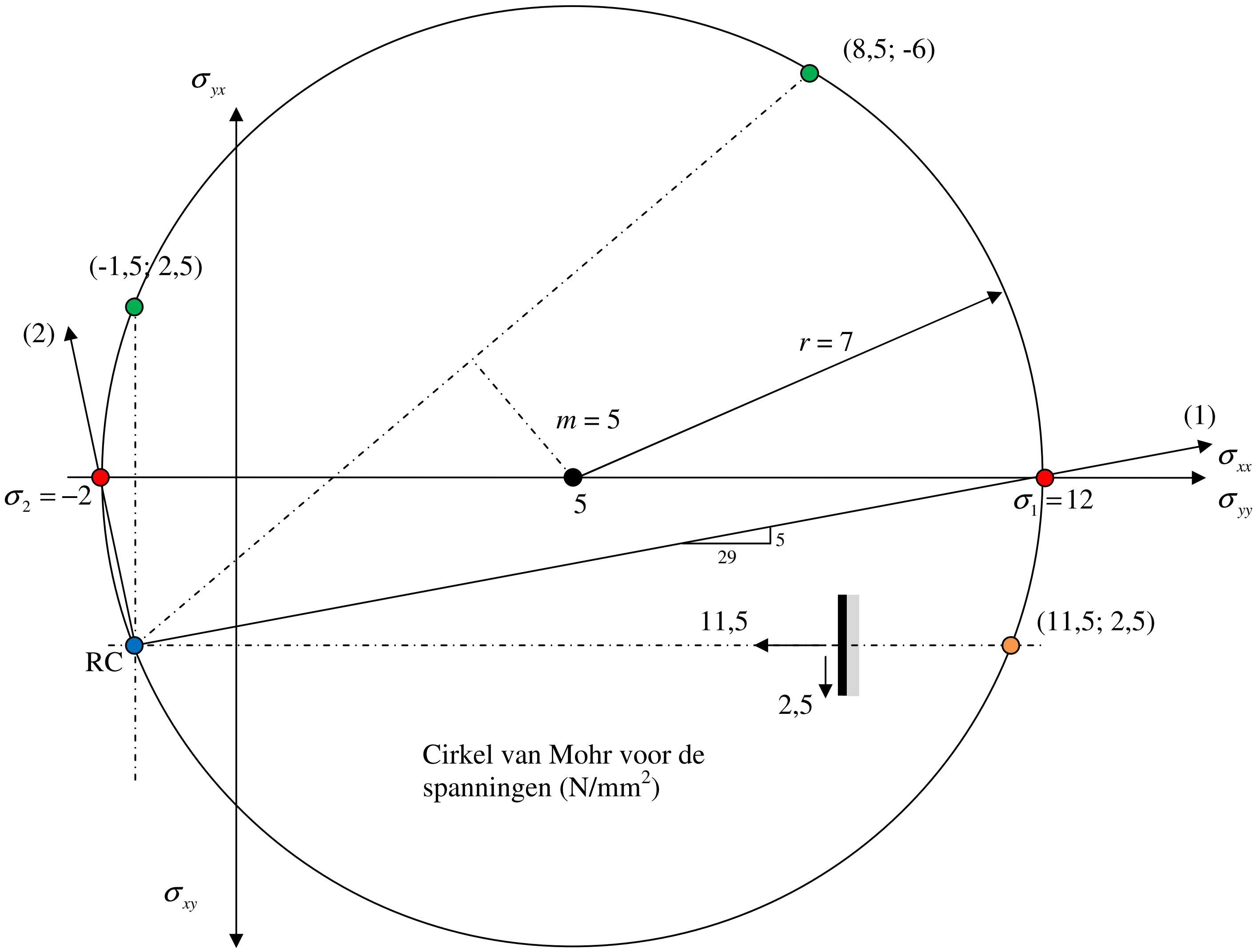
$$V_{\text{BD-2}} = V_{\text{BD-1}} \times \frac{n}{n-1} = 4,59 \text{ kN}$$

Opgave 4

a) Op de vlakken AC en BC werken de gegeven spanningen zoals hieronder is weergegeven.



b) De cirkel kan worden getekend met de gegeven spanningen.



Cirkel van Mohr voor de spanningen (N/mm²)

Middelpunt van de cirkel en de straal kunnen worden berekend en zijn aangegeven in de tekening. Hiermee kunnen de hoofdspanningen worden bepaald:

$$\sigma_1 = m + r = 5 + 7 = 12,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = m - r = 5 - 7 = -2,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\textit{vlakspanning})$$

c) De spanningstensor in het x-y-assenstelsel wordt weergegeven met:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,5 & 2,5 \\ 2,5 & -1,5 \end{bmatrix} \text{N/mm}^2$$

d) De spanningen omzetten naar rekken levert:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(11,5 - \nu \times (-1,5)\right) = \frac{3}{2000}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(-1,5 - \nu \times 11,5\right) = \frac{-1}{1500}$$

Hieruit volgt: $\nu = 0,33; \quad E = 8000 \text{ N/mm}^2$

Let op: Hier mogen **niet** de hoofdspanningen worden gebruikt, dat is een essentiële fout die streng wordt aangerekend.

e) De gevraagde vezelrichting valt samen met hoofdrichting 1. De gevraagde rek is dus de hoofdrek 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(12 - \nu \times (-2\right) = 15,8 \times 10^{-4}$$

Let op: Hier **moeten** de hoofdspanningen worden gebruikt aangezien de gevraagde vezelrichting samenvalt met de hoofdrichting (1). Alternatief is om de tensortransformatieformules te gebruiken maar daar was (met reden) niet in voorzien op het formuleblad. Opmerken dat het hier om de hoofdrichting handelt was een cruciaal onderdeel van de toetsing.

f) Von Mises toepassen met de bepaalde hoofdspanningen en opletten dat het hier om een *kwadratisch* spanningscriterium handelt. Het betreft een vlakspanningstoestand waarbij per definitie één van de hoofdspanningen gelijk is aan nul. Opnieuw sorteren van de hoofdspanningen levert (niet essentieel voor de berekening):

$$\sigma_1 = 12; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -2;$$
$$\frac{\gamma^2}{6}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right) \le \tfrac{1}{3} f_y^2$$
$$\frac{\gamma^2}{6}\left(144 + 4 + 196\right) \le \tfrac{1}{3} \times 100$$
$$\frac{172\gamma^2}{3} \le \frac{100}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{100}{172}} = 0,76 \quad (\textit{onveilig})$$

De veiligheid is 0,76 hetgeen onvoldoende is.

TU Delft Subfaculteit Civiele Techniek
Constructiemechanica

Vermeld op bladen van uw werk:
STUDIENUMMER :
NAAM :

Tentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

23 Januari 2012 van 14:00 – 17:00 uur

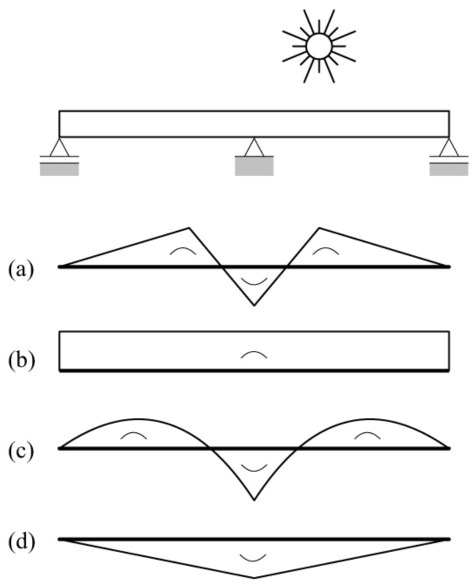
Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **5 vraagstukken**.
- Werk elk vraagstuk uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen, PDA's en andere gadgets met al dan niet UMTS en/of bluetooth-verbinding mogen niet aan staan tijdens het tentamen en ook niet op de tafels liggen
- Maak gebruik van de bijgeleverde formulebladen
- Gebruik geen rode pen of rood potlood
- Het gebruik van woordenboeken en (grafische) rekenmachines is toegestaan

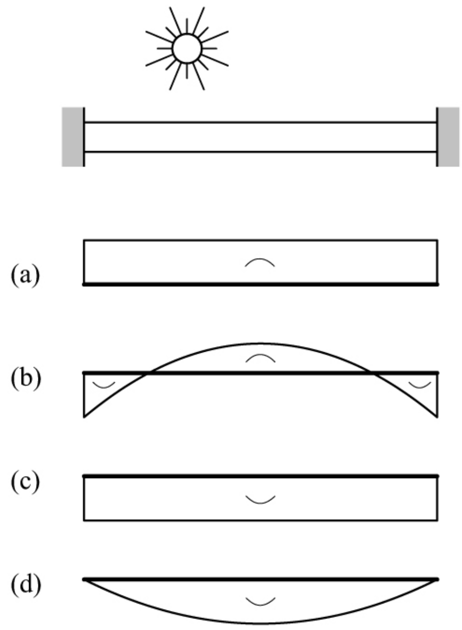
VRAAGSTUK 1 : Theorie, statisch onbepaald (ca 15 min)

Van een statisch onbepaalde ligger worden hieronder drie situaties geschetst waar de bovenzijde van de ligger door zonbestraling warmer wordt. Gevraagd wordt naar de juiste momentenlijn voor iedere getekende situatie. Omcirkel de juiste oplossing (a), (b), (c) of (d).

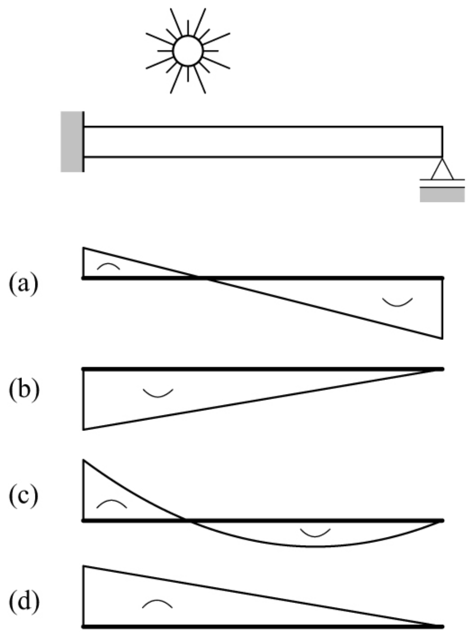
Situatie 1



Situatie 2

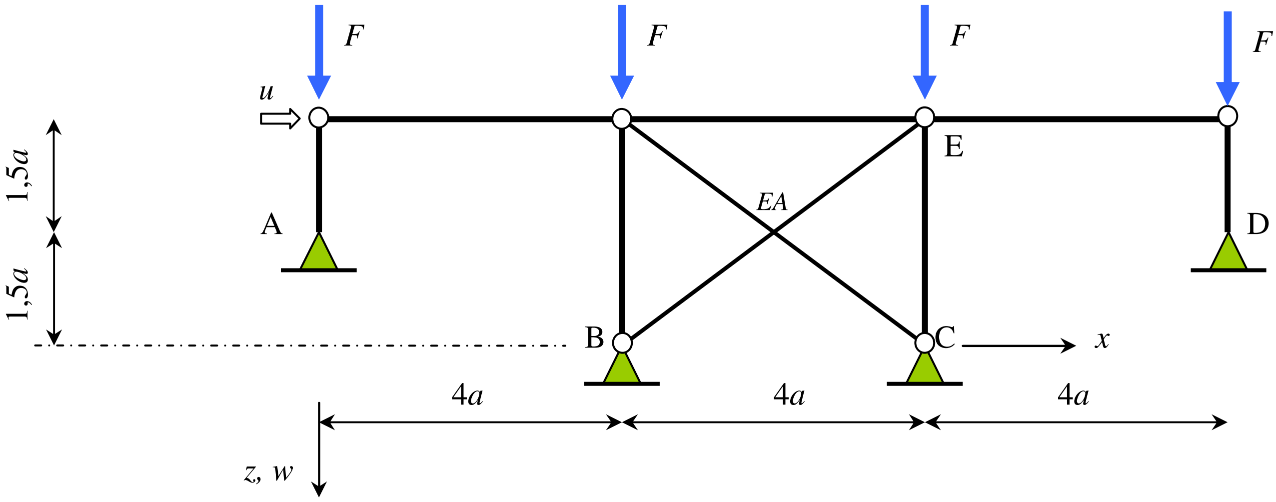


Situatie 3



VRAAGSTUK 2 : Theorie, knik (ca 25 min)

Een geschoorde constructie bestaat uit starre staven voor de kolommen en liggers die scharnierend met elkaar zijn verbonden. De schoren zijn kruisende diagonalen met een rekstijfheid EA zoals in de figuur is aangegeven. De schoor heeft geen enkele buigstijfheid. Bij een horizontale verplaatsing u zoals aangegeven, wordt op slechts één van de schoren een beroep gedaan om als schorend element te gaan fungeren.



Gegevens : a = 2 m; EA = 20000 kN

Vragen:

a) Teken de knikvorm en laat zien welke diagonaal in uw situatie, als schoor dienst doet en geef aan waarom?

Voorgesteld wordt om de schorende werking te modelleren met behulp van een *horizontale* translatieveer in E.

b) Teken het voorgestelde model waarmee de kniklast kan worden bepaald en toon aan dat de veerstijfheid van de translatieveer gelijk is aan:

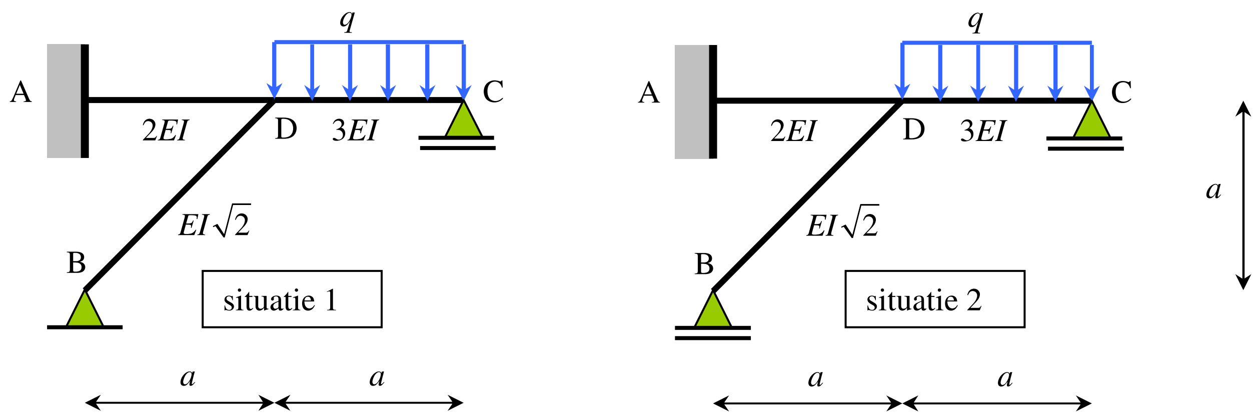
$$k = \frac{16}{125}\frac{EA}{a} \qquad \text{(aantonen m.b.v. schets en berekening!)}$$

c) Bepaal de kniklast.

d) Wat vindt U van de modellering met één enkele veer?

VRAAGSTUK 3 : Statisch onbepaalde constructies (ca 60 min)

Een raamwerkconstructie in **situatie 1** wordt op de overspanning DC belast met een gelijkmatig verdeelde belasting q. Alle staven hebben een afwijkende buigstijfheid zoals in de figuur is aangegeven. In D zijn de aansluitende staven momentvast met elkaar verbonden. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. De krachtsverdeling in de constructie moet worden bepaald met behulp van de krachtenmethode.



!!! LET OP DE BUIGSTIJFHEDEN VAN DE STAVEN !!!

Gegevens : a = 4 m; q = 1140 kN/m; EI = 150000 kNm^2

Vragen:

a) Schets de vervormde constructie van situatie 1 en geef aan hoeveel voudig statisch onbepaald deze constructie is. Bepaal een statisch bepaald hoofdsysteem en geef uw statisch onbepaalden aan in een schets waardoor duidelijk wordt wat de door U gekozen positieve richtingen zijn van de statisch onbepaalden.

b) Stel de vormveranderingsvoorwaarde(n) op en bepaal de statisch onbepaalde(n). U mag gebruik maken van alle mogelijke handigheidjes om het probleem zo snel mogelijk op te lossen, dus ook de GR!

c) Teken de M-lijn voor dit belastingsgeval inclusief de vervormingstekens en zet de karakteristieke waarden erbij.

De constructie wordt vervolgens gemodificeerd, oplegging B verandert in een horizontale roloplegging. Zie hiervoor de constructie van **situatie 2**.

d) Wat verandert er aan de oplossingsstrategie door deze ingreep? Geef dit kort en bondig weer!

e) Schets de vervormde constructie en laat duidelijk zien waar de invloed van het veranderde statische systeem, tot uitdrukking komt.

f) Stel de noodzakelijke vergelijkingen op waarmee de krachtsverdeling kan worden gevonden. Ondersteun het antwoord zonodig met duidelijke schetsjes.

g) Los de onbekende op en teken de M-lijn. Gebruik indien nodig de GR!

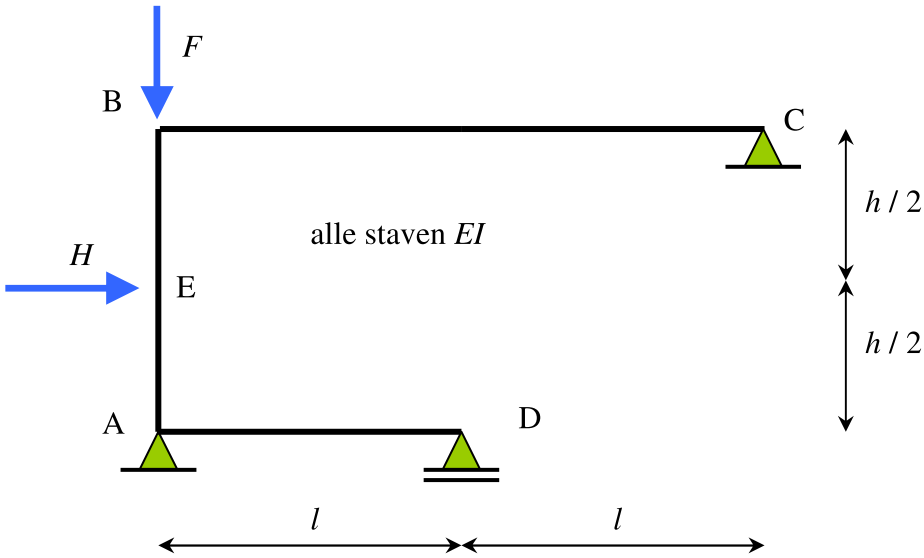
☺ Ter controle :

- Het grootste moment in staaf BD is in absolute zin gelijk aan 400 kNm.
- Het aansluitmoment in D van staaf DC is in absolute zin 2880 kNm.

h) Hoe groot is de horizontale verplaatsing van roloplegging B?

VRAAGSTUK 4 : Stabiliteit (ca 40 min)

Van de onderstaande (educatieve) constructie wordt gevraagd een stabiliteitsonderzoek te verrichten. Alle staven hebben dezelfde buigstijfheid EI en zijn star met elkaar verbonden. De invloed van de normaalkrachtvervorming en de invloed van de dwarskrachten op het evenwicht in de vervormde stand, mogen worden verwaarloosd. De kracht H is een constante kracht, de verticale puntlast F kan variëren. Ons onderzoek is gericht op met name staaf AB.



Gegevens : $EI = 1000$ kNm^2; $h = 4$ m; $l = 4$ m; $F = 300$ kN; $H = 92$ kN

Vragen:

a) Bepaal van deze constructie de 1^e orde momentenverdeling en toon daarbij aan dat voor het moment in E, in absolute zin, geldt:

$$M_E = 68 \text{ kNm}$$

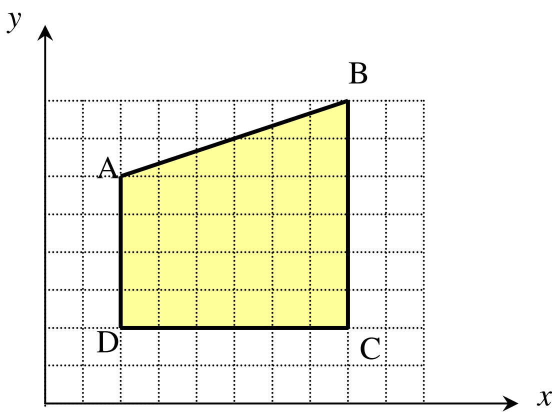
b) Bepaal de 1^e orde horizontale oplegreactie in C.
c) Bepaal de 1^e orde verplaatsing in E.
d) Geef het model weer waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.
e) Bepaal de kniklast F_k van deze constructie.
f) Geef een afschatting van de tweede orde uitbuiging van deze constructie in E.
g) Hoe groot zal het 2^e orde moment in E zijn?
h) Heeft U nog aanvullende opmerkingen?

VRAAGSTUK 5 : Elasticiteitstheorie (ca 40 min)

Van een plaat in een homogene isotrope vlakspanningstoestand zijn de randen ABCD belast. Van twee vlakken zijn de spanningen bekend. Voor de aanduiding van de spanningen wordt gebruik gemaakt van een lokale *x*-as die samenvalt met de uitwendige normaal van het oppervlak:

- Op AB, normaalspannning 50 N/mm^2, schuifspanning 40 N/mm^2
- Op BC, normaalspanning 65 N/mm^2, schuifspanning -35 N/mm^2

Het proefstuk is gemaakt van een materiaal waarvan het vloeigedrag goed te beschrijven is met de vloeivoorwaarde van von Mises.



Cirkel van Mohr
In verband met de getalswaarden is het belangrijk de cirkels zo nauwkeurig mogelijk te tekenen dus gebruik een scherp potlood. Eventuele kleine afwijkingen zijn onvermijdelijk maar de docent zal daar rekening mee houden bij de beoordeling.

Gegevens: $E = 27841{,}15$ N/mm^2; $\nu = 0{,}3813$; $f_y = ?$ N/mm^2

Vragen:

a) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen. Geef duidelijk aan waar het middelpunt en het richtingencentrum ligt en schrijf de waarden erbij. Kies zelf een geschikte schaal en geef duidelijk de hoofdrichtingen en hoofdspanningen aan.

b) Bereken uit de cirkel van Mohr (of lees de waarden zo nauwkeurig als mogelijk af) wat de spanningen worden op rand DC.

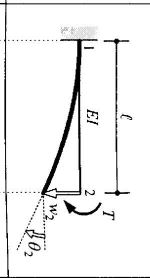
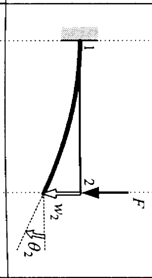
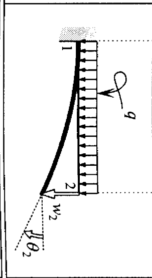
c) Het materiaal is bij de gegeven spanningen belast tot het uiterste. Bepaal hiermee de waarde van de vloeispanning f_y op basis van het vloeicriterium van von Mises.

d) Teken de cirkel van Mohr voor de rekken. Geef duidelijk aan waar het richtingencentrum ligt en bepaal de hoofdrekken. Kies zelf een geschikte schaal.

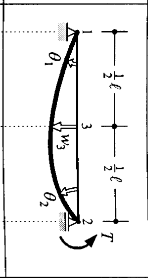
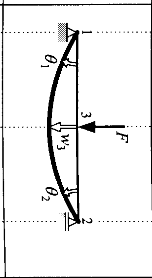
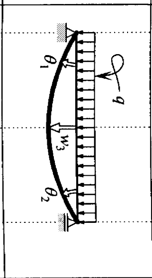
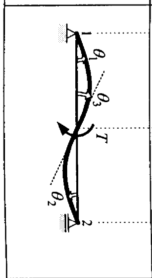
e) Bepaal met behulp van de cirkel de rek in vezels die onder een hoek α van 120 graden staan met de horizontale as.

FORMULEBLAD

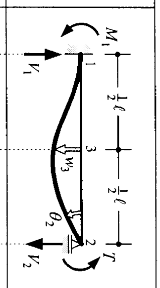
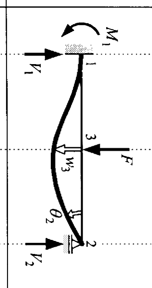
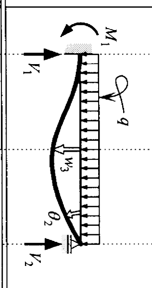
vergeet-mij-nietjes

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI};\quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI};\quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI};\quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$

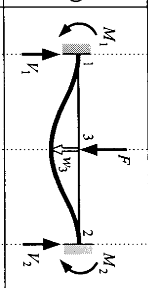
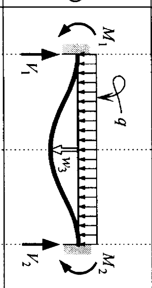
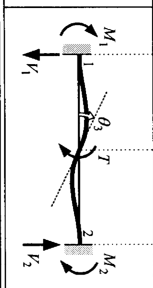
vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI};\quad \theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI};\quad w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI};\quad w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI};\quad w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI};\quad \theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI};\quad w_3 = 0$

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI};\quad w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T;\quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI};\quad w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell;\quad V_1 = \frac{11}{16}F;\quad V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI};\quad w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2;\quad V_1 = \frac{5}{8}q\ell;\quad V_2 = \frac{3}{8}q\ell$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

(10)		$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell;\quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2;\quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)		$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI};\quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T;\quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \quad \text{met} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_{\mathrm{k}}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_{\mathrm{k}} = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}} \quad \text{met}: \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \qquad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \qquad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha\cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x\right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_{\mathrm{k}} = \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2-4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met}: \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1}; \ \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2}; \ \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met}: \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

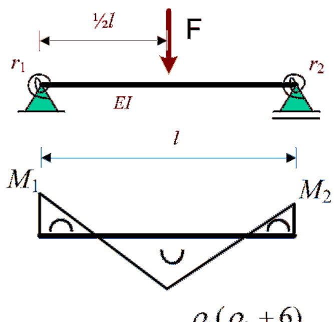
Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

VGN voor verend ingeklemde statisch onbepaalde ligger



$$\rho_1 = \frac{r_1 l}{EI}; \qquad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI};$$

$$M_1 = \frac{\rho_1(\rho_2+6)}{8\rho_1(\rho_2+4)+32(\rho_2+3)} Fl$$

$$M_2 = \frac{\rho_2(\rho_1+6)}{8\rho_2(\rho_1+4)+32(\rho_1+3)} Fl$$

UITWERKING MET ANTWOORDEN

Opgave 1

Situatie 1 : Antwoord **d)**

Situatie 2 : Antwoord **c)**

Situatie 3 : Antwoord **b)**

Opgave 2

a) Zie voorbeeld 3 van hoofdstuk in het dictaat.

b) Idem.

c) Het rekenmodel is de starre staaf, horizontaal gesteund door de translatieveer, en belast met de belasting op de staaf EN de aanpendelende belasting. Essentieel is dat bij de bepaling van de aanpendelende belasting rekening wordt gehouden met de lengte van de pendels waarop de belasting staat. De totale belasting op het rekenmodel wordt hiermee:

$$F_{tot} = F + \frac{F}{1,5a}3a + \frac{F}{3a}3a + \frac{F}{1,5a}3a = 6F$$

De kniklast van dit model kan eenvoudig worden bepaald met:

$$F_k = k \times 3a = k = \frac{16}{125}\frac{EA}{a} \times 3a$$

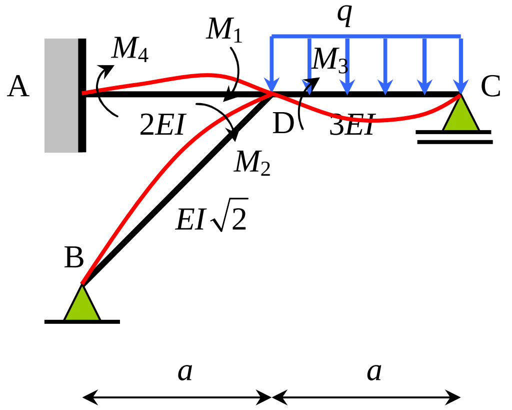
$$F_k = 6F = k = \frac{16}{125}\frac{EA}{a} \times 3a$$

$$F = \frac{8}{125}EA = \frac{8 \times 20000}{125} = 1280 \text{ kN}$$

d) De horizontale veer kan nooit een schuine staaf vervangen. Door het verlengen van de schuine staaf ontstaat niet alleen een horizontale kracht die de constructie overeind wil houden maar er ontstaat ook een extra verticale kracht die de constructie in de verplaatste stand wil drukken (versterkend effect). Dit effect wordt in dit model niet meegenomen. Voor de fijn slijpers; de veer is een tweede orde tensor en deze kan niet als een vector worden behandeld.

Opgave 3

a) De constructie in situatie 1 is drievoudig statisch onbepaald en heeft **niet-verplaatsbare** knopen. De richting van de aansluitende momenten zijn getekend zoals ze in werkelijkheid zullen werken op de uiteinde van de staven.



$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$M_3 = -(M_1 + M_2)$$

De aansluitende momenten op knoop D moeten in evenwicht zijn. Zodoende kan een van de onbekende momenten op knoop D worden uitgedrukt in de overige momenten. Vanwege het feit dat de knopen niet verplaatsen is ook duidelijk dat het moment bij de inklemming in A de helft is in grootte van het moment in D in staaf AD ($\varphi_A = 0$). Uiteindelijk resteren zo twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het statisch bepaalde hoofdsysteem bestaat louter en alleen uit liggertjes op twee steunpunten met de aangegeven onbekende momenten op de uiteinden van de staven.

b) Er zijn drie vormveranderingsvergelijkingen nodig. Echter één vergelijking is al gebruikt. In de resterende twee vergelijkingen wordt direct het knoopevenwicht van D verwerkt:

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DC}} \quad : \frac{\frac{1}{2}M_1 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} = -\frac{-(M_1+M_2)a}{3\times 3EI} - \frac{qa^3}{24\times 3EI}$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DB}} \quad : \frac{\frac{1}{2}M_1 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} = -\frac{M_2 a\sqrt{2}}{3\times EI\sqrt{2}}$$

Opschonen levert:

$$17M_1 + 8M_2 = qa^2$$
$$3M_1 - 8M_2 = 0$$

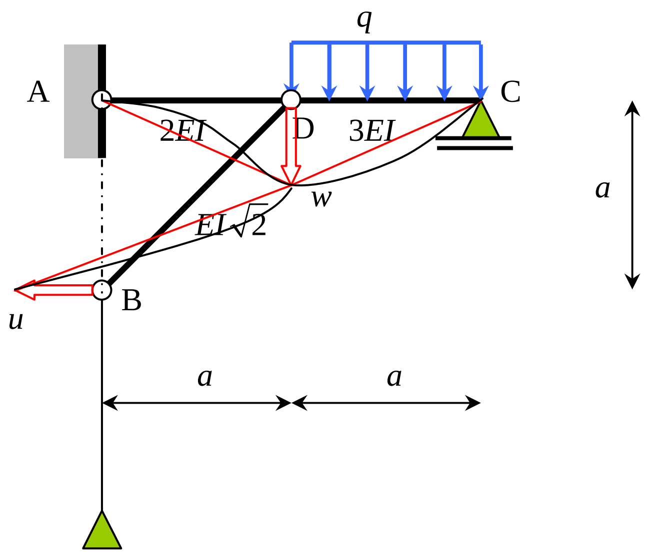
Elimineren van M_2 levert: $M_1 = \frac{1}{20}qa^2$; $M_2 = \frac{3}{160}qa^2$; $M_3 = -\frac{11}{160}qa^2$; $M_4 = \frac{1}{40}qa^2$;
Invullen van de gegevens levert voor de momenten:

$$M_1 = 912 \text{ kNm}$$
$$M_2 = 342 \text{ kNm}$$
$$M_3 = -1254 \text{ kNm}$$
$$M_4 = 456 \text{ kNm}$$

c) Teken een nette momentenlijn inclusief vervormingstekens en de waarden voor een aantal karakteristieke punten.

d) In situatie 2 kan de constructie in steunpunt B horizontaal verplaatsen. Er ontstaat nu een constructie met verplaatsbare knopen. Het statisch bepaald hoofdsysteem levert nu liggers op twee steunpunten op waarvan de knopen kunnen verplaatsen. Oplossen kan met de hybride oplossingsmethode waarbij de starre rotatie van het mechanisme dat ontstaat als alle starre verbindingen worden vervangen door scharnieren, een extra onbekende oplevert. Deze kan worden bepaald met de extra eis dat het mechanisme in evenwicht moet zijn onder de gegeven belasting en de statisch onbepaalden.

e) Het mechanisme is hieronder getekend. Essentieel is dat voor iedere staaf de grootte van de rotatie wordt vastgesteld en om welk punt de staaf roteert.



- Staaf AD roteert om A met een hoek θ (rechtsom)
- Staaf DC roteert om C met een hoek θ (linksom)
- Staaf BD roteert om A met een hoek θ (rechtsom)

De vervormde constructie is weergegeven t.o.v. de verplaatsing van het starre mechanisme. Er zijn drie vormveranderingsvergelijkingen noodzakelijk en een virtuele arbeidsvergelijking om de vier onbekenden op te lossen.

f) Als dezelfde richtingen worden aangehouden van de vier onbekende momenten als in situatie 1 dan kunnen de vormveranderingsvergelijkingen eenvoudig worden overgenomen. Let er wel op dat het moment bij de inklemming nu niet gelijk is aan de helft van het moment aan de andere kant van staaf AD. Immers het betreft nu een probleem met verplaatsbare knopen! (zie de theorie).

$$\varphi_{\mathrm{A}}^{\mathrm{AD}} = 0 \qquad : -\frac{M_4 a}{3\times 2EI} + \frac{M_1 a}{6\times 2EI} - \theta = 0$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DC}} \qquad : \frac{M_4 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} - \theta = -\frac{-(M_1 + M_2)a}{3\times 3EI} - \frac{qa^3}{24\times 3EI} + \theta$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DB}} \qquad : \frac{M_4 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} - \theta = -\frac{M_2 a\sqrt{2}}{3\times EI\sqrt{2}} - \theta$$

$$\delta A = 0 \qquad : M_4 \times \delta\theta + M_1 \times \delta\theta - (-M_1 - M_2)\times \delta\theta + M_2 \times \delta\theta + (qa)\times \tfrac{1}{2} a \times \delta\theta = 0$$

g) Oplossen van dit stelsel gaat eenvoudig met de Grafische Rekenmachine (GR). Om het stelsel er vlot in te zetten worden de vergelijkingen eerst opgeschoond:

$$M_1 - 2M_4 - \frac{12EI}{a}\theta = 0$$

$$-20M_1 - 8M_2 + 6M_4 - \frac{144EI}{a}\theta = -qa^2$$

$$-2M_1 + 4M_2 + M_4 = 0$$

$$2M_1 + 2M_2 + M_4 = -\tfrac{1}{2}qa^2$$

Oplossen met de GR levert :

$$M_1 = -2480 \text{ kNm}$$
$$M_2 = -400 \text{ kNm}$$
$$M_3 = 2880 \text{ kNm}$$
$$M_4 = -3360 \text{ kNm}$$
$$\theta = 0{,}009422 \text{ rad}$$

Teken vervolgens een nette momentenlijn met de juiste vervormingstekens en zet de gevonden waarden in de *M*-lijn er bij.

h) De horizontale verplaatsing is gelijk aan:

$$u = \theta \times a = 0{,}0377 \text{ m} \quad (\leftarrow)$$

Opgave 4

a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen (geschoord). Een eerste orde berekening houdt geen rekening met de invloed van de vervormde stand op het evenwicht. De verticale puntlast kan daarom achterwege worden gelaten. Oplossen kan m.b.v. twee vormveranderingsvergelijkingen maar er kan ook gekozen worden om gebruik te maken van een *vergeet-mij-nietje* voor een statisch onbepaalde ligger zoals weergegeven op het laatste formuleblad. De rotatieveren zijn eenvoudig te vinden uit de verende werking van de delen BC en AD.

$$r_1 = \frac{3EI}{l}; \quad \rho_1 = \frac{r_2 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 3;$$

$$r_2 = \frac{3EI}{2l}; \quad \rho_2 = \frac{r_1 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{3}{2};$$

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{\rho_1(\rho_2+6)}{8\rho_1(\rho_2+4)+32(\rho_2+3)} \times Hh = \frac{3\times 7,5}{8\times 3\times 5,5+32\times 4,5} \times 92\times 4 = 30\text{ kNm}$$

$$M_{\mathrm{B}} = \frac{\rho_2(\rho_1+6)}{8\rho_2(\rho_1+4)+32(\rho_1+3)} \times Hh = \frac{1,5\times 9}{8\times 1,5\times 7+32\times 6} \times 92\times 4 = 18\text{ kNm}$$

Het moment t.p.v. de horizontale puntlast van 92 kN wordt hiermee:

$$M_{\mathrm{E}} = \left|\frac{18+30}{2} - \tfrac{1}{4}\times 92\times 4\right| = 68\text{ kNm} \quad \text{(los dit grafisch op m.b.v. de } M\text{-lijn)}$$

b) De 1e orde horizontale oplegreactie in C volgt uit het evenwicht:

$$C_H = \tfrac{1}{2}\times 92 - \frac{30}{4} + \frac{18}{4} = 43\text{ kN}$$

c) De eerste orde verplaatsing in E levert alleen een horizontale verplaatsing op. Met behulp van de gegeven *vergeet-mij-nietjes* volgt hiervoor:

$$u = \frac{92\times 4^3}{48EI} - \frac{18\times 4^2}{16EI} - \frac{30\times 4^2}{16EI} = 0,075\text{ m} \quad (\rightarrow)$$

d) Controle van de drukstaaf AB, dit is een geschoorde staaf met aan twee zijden een verende inklemming. Gebruik hiervoor de eerder bepaalde rotatieveerstijfheden. De knikcontrole van BC zal eigenlijk ook moeten worden uitgevoerd. In de vraagstelling staat echter dat we ons met name richten op staaf AB. Staaf AB is overigens niet maatgevend maar dat mag zelf worden gecontroleerd.

e) De kniklast volgt uit:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \frac{\pi^2 EI}{h^2} = 1044\text{ kN} \quad \left(\pi^2 = 10 \Rightarrow 1058\text{ kN}\right)$$

f) De 2e orde uitbuiging mag worden afgeschat met de vergrotingsfaktor:

$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,40\times 0,075 = 0,105 \quad \text{m} \quad \text{met:} \quad n = \frac{F_k}{300} = 3,48$$

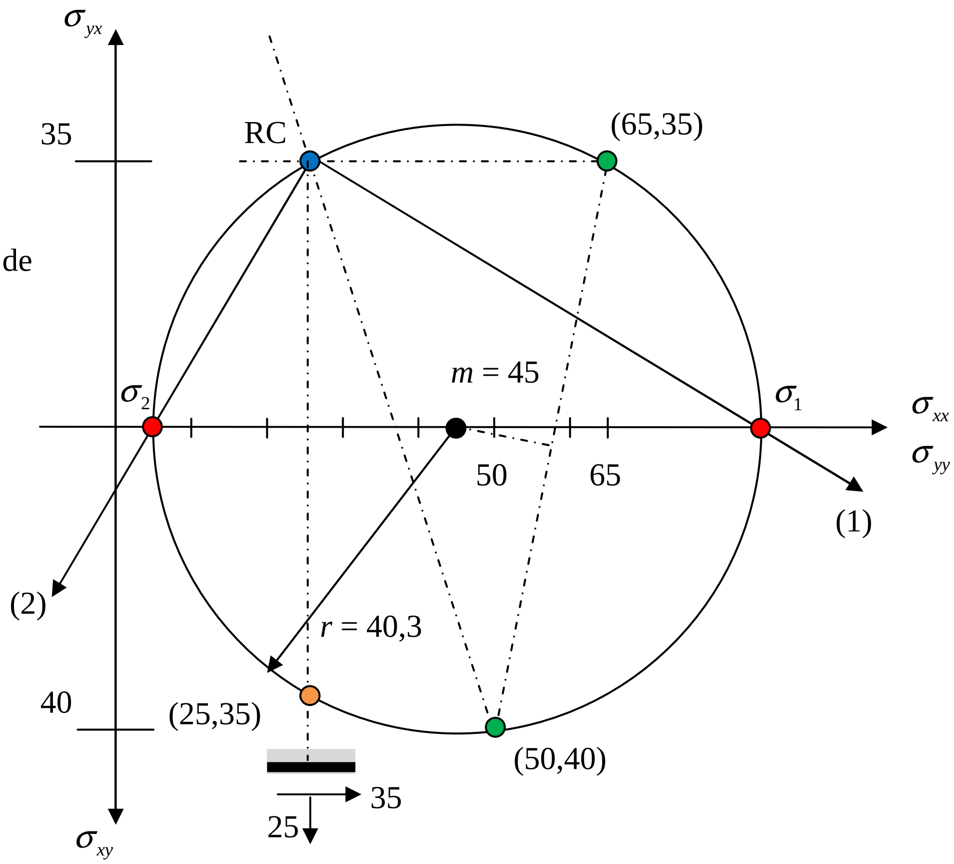
g) Een bovengrens voor het 2e orde moment kan worden afgeschat met:

$$M_{\mathrm{E\text{-}2}} = M_{\mathrm{E}} + 0,105\times 300 = 117,5\text{ kNm}$$

Opgave 5

a) De cirkel kan worden getekend met de gegeven spanningen.

Cirkel van Mohr voor de spanningen (N/mm^2)



Middelpunt van de cirkel en de straal kunnen worden berekend en zijn aangegeven in de tekening. Hiermee kunnen de hoofdspanningen worden bepaald:

$$\sigma_1 = m + r = 45 + 40,3 = 85,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = m - r = 45 - 40,3 = 4,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\textit{vlakspanning})$$

b) Trek de normaal van vlak DC vanuit het RC en lees het snijpunt met de cirkel af. Een spanningspunt (25,35) wordt als voldoende nauwkeurig aangemerkt. Beide spanningen zijn positief. Teken de juiste richting van deze spanningen!

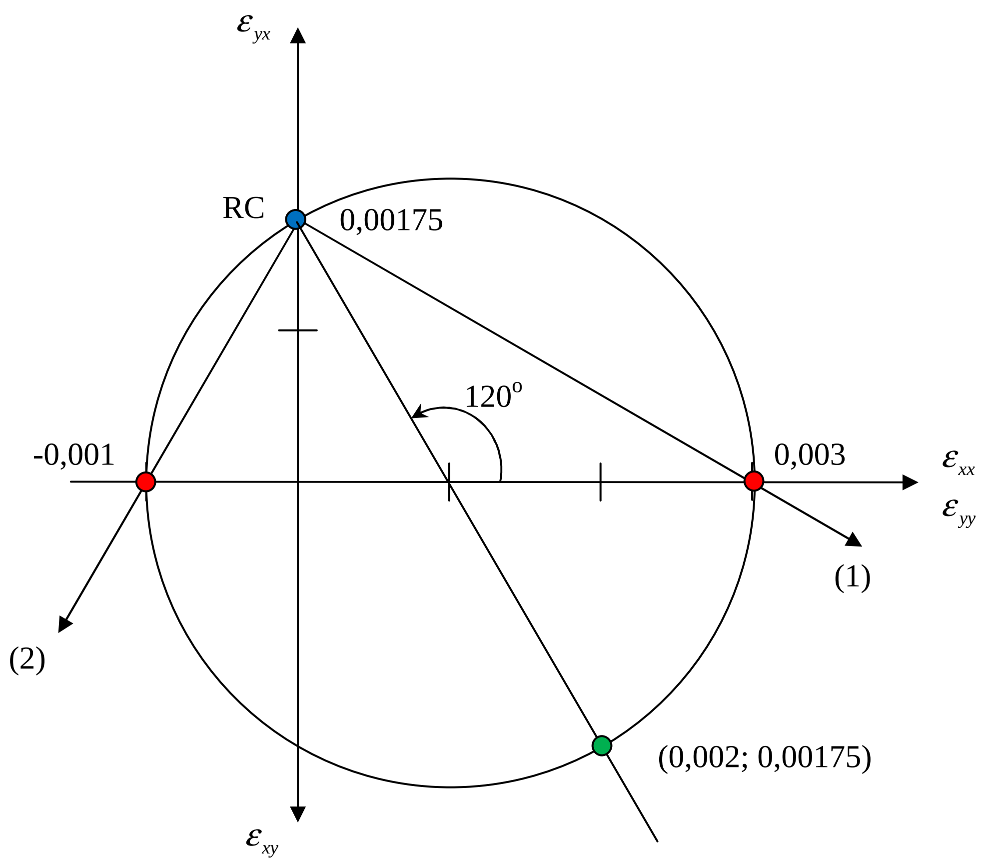
c) De hoofdspanningen kunnen worden ingevuld in het von Mises criterium. De benodigde vloeispanning kan hiermee worden bepaald op 83 N/mm^2. Volgens de theorie van een vlakspanningstoestand is tenminste één van de hoofdspanningen nul!

d) Van spanning naar rekcirkel kan eenvoudig door de hoofdspanningen om te rekenen en de relatieve positie van het RC in de spanningscirkel over te nemen in de rekcirkel. Immers de hoofrichtingen voor de rekken zijn hetzelfde als de hoofdrichtingen voor de spanningen.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = 0,003$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -0,001$$

Cirkel van Mohr voor de rekken



e) Trek vanuit het RC een lijn evenwijdig aan de richting van de vezel en lees het op het snijpunt met de cirkel de rekken af. Op de horizontale as wordt de rek in de vezelrichting afgelezen. Op de verticale as wordt de helft van de afschuifvervorming afgelezen. De rek in deze vezel is gelijk aan 0,002.

Opmerking:

De gegeven spanningen komen van vlakjes die niet loodrecht op elkaar staan. Hoewel de spanningen dus wel afkomstig zijn van dezelfde spanningstoestand vormen deze samen niet een complete spanningstensor. In feite zijn er twee halve tensoren gegeven met ieder een eigen (lokaal) assenstelsel. Studenten die alle spanningen bij elkaar in een tensor hebben gepresenteerd hebben daarmee de theorie geweld aangedaan.

Subfaculteit Civiele Techniek
Constructiemechanica

Vermeld op bladen van uw werk:
STUDIENUMMER :
NAAM :

Hertentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

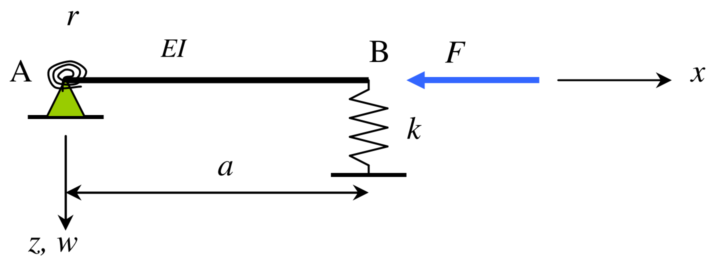
13 April 2011 van 14:00 – 17:00 uur

Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **5 vraagstukken**.
- Werk elk vraagstuk uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen en of PDA's al dan niet met UMTS verbinding mogen niet aan staan tijdens het tentamen
- Maak gebruik van de bijgeleverde formulebladen
- Gebruik geen rode pen of rood potlood
- Het gebruik van woordenboeken en (grafische) rekenmachines is toegestaan

VRAAGSTUK 1 : Theorie, stabiliteit (ca 30 min)

Van de onderstaande op druk belaste buigzame staaf wordt gevraagd de analyse op te stellen voor een stabiliteitsonderzoek.De ligger is prismatisch en heeft daarmee over de gehele lengte dezelfde buigstijfheid *EI*. Aan de randen is de ligger ondersteund met een rotatieveer en een translatieveer. De veerstijfheden van deze veren zijn *r* en *k*.



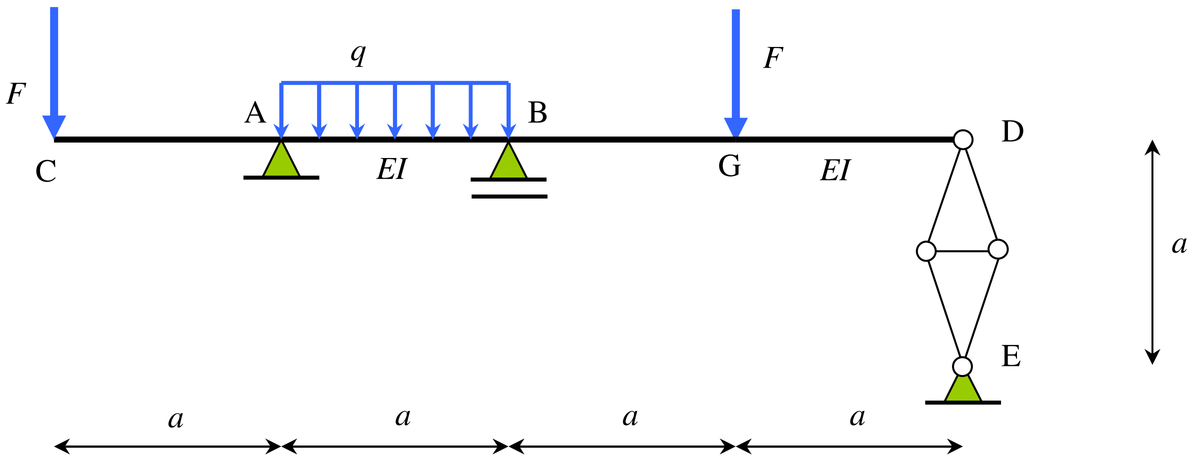
Vragen:

a) Geef de algemene oplossing van de knikvorm en geef daarbij duidelijk aan wat de onbekenden zijn en eventuele parameters voorstellen.
b) Stel voor dit probleem de randvoorwaarden op en schrijf de voorwaarden tot een stelsel vergelijkingen. Ondersteun uw antwoord met duidelijke schetsjes waarmee helder wordt hoe u tot uw vergelijkingen bent gekomen.
c) Hoe kan de kniklast worden bepaald?
d) Binnen welke grenzen kunt u de kniklast afschatten?

Merk op :
Er wordt niet gevraagd de kniklast exact te bepalen dus ga dat ook niet doen i.v.m. de tijd!

VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies 1 (ca 35 min)

Een ligger met overstek wordt belast zoals in de figuur is aangegeven. Kolom DE bestaat uit een vakwerkconstructie zoals in de figuur is aangegeven.



Gegevens : $a = 4$ m; ; $q = 51$ kN/m; $F = 102$ kN; $EI = 10000$ kNm^2

Vragen:

a) Schets de vervormde constructie en geef aan hoeveel voudig statisch onbepaald deze constructie is. Bepaal een statisch bepaald hoofdsysteem en geef uw statisch onbepaalden aan in een schets waardoor duidelijk wordt wat de door U gekozen positieve richtingen zijn van de statisch onbepaalden.

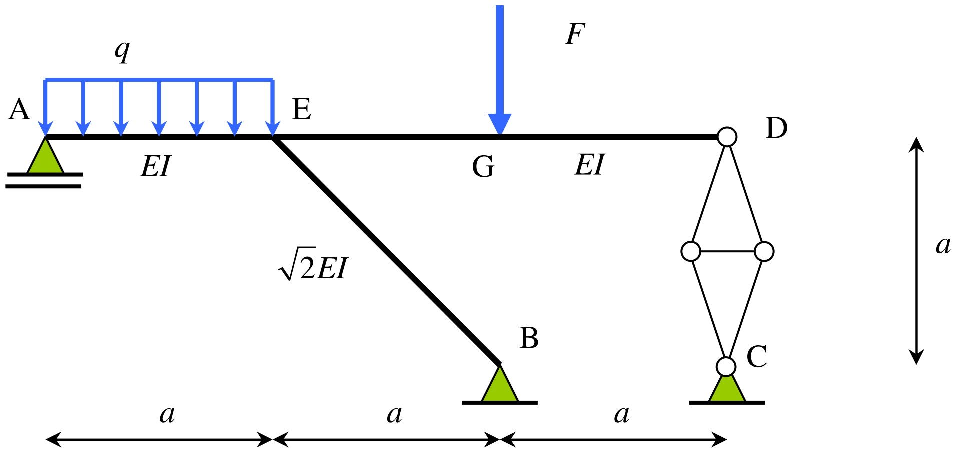
b) Stel de vormveranderingsvoorwaarde(n) op en bepaal de statisch onbepaalde(n). U mag gebruik maken van alle mogelijke handigheidjes om het probleem zo snel mogelijk op te lossen.

c) Teken de *M*- en *V*-lijn voor dit belastingsgeval inclusief de vervormingstekens en zet de karakteristieke waarden erbij.

d) Bepaal de zakking van punt G halverwege BD.

VRAAGSTUK 3 : Statisch onbepaalde constructies 2 (ca 45 min)

Het onderstaande raamwerk is in D ondersteund m.b.v. een vakwerk CD. In E zijn de staven momentvast met elkaar verbonden. In A is een horizontale roloplegging aangebracht en B is een scharnierende ondersteuning. De belasting en de buigstijfheden zijn in de figuur aangegeven.



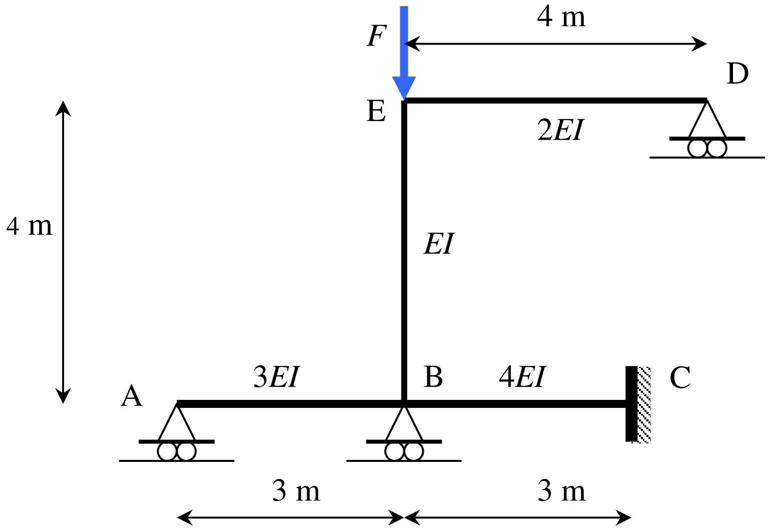
Gegevens : a = 4 m; ; q = 51 kN/m; F = 102 kN; EI = 10000 kNm^2

Vragen:

a) Maak een schets van de vervormde constructie
b) Geef in deze schets aan hoe het model eruit ziet waarmee de krachtsverdeling in deze constructie kan worden bepaald en laat duidelijk zien wat de onbekenden zijn.
c) Stel de vergelijkingen op waarmee de onbekenden kunnen worden bepaald.
d) Los de onbekenden op. U mag daarbij gebruik maken van het gegeven dat het maximale moment in staaf EB in absolute zin gelijk is aan 357 kNm.
e) Teken de momentenlijn inclusief de vervormingstekens en zet de waarden erbij.
f) Bepaal de verplaatsing van punt E.

VRAAGSTUK 4 : Stabiliteit (ca 30 min)

Van de onderstaande constructie wordt gevraagd een stabiliteitsonderzoek te verrichten. Alle staven hebben een verschillende buigstijfheid. De constructie is in C ingeklemd, de overige opplegginen zijn horizontale rolopleggingen. De invloed van de normaalkrachtvervorming en de invloed van de dwarskrachten op het evenwicht in de vervormde stand, mogen worden verwaarloosd.



Gegevens : EI =1000 kNm^2; F = 100 kN

Vragen:

a) Geef een schatting van de kniklengte (maak een schets).

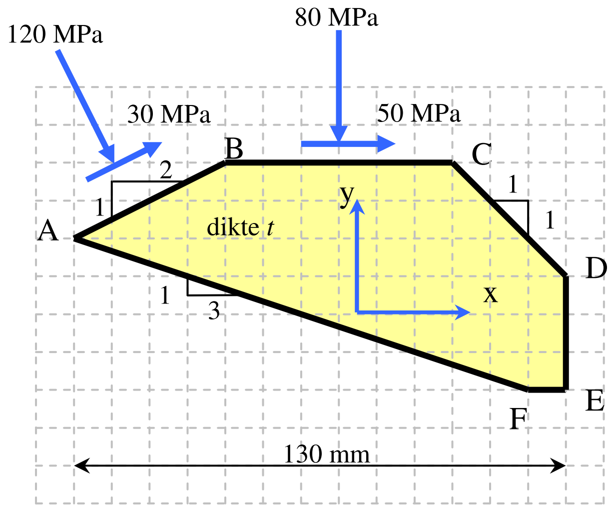
b) Bepaal van de gegeven constructie de maatgevende belasting F op basis van een stabiliteitsonderzoek. Betrek in uw antwoord duidelijk de modelvorming en de bepaling van eventuele gebruikte parameters. Ondersteun het antwoord met een duidelijke schets.

c) Bepaal de kniklengte.

d) Hoe beoordeelt U de gevoeligheid voor 2^e orde effecten van deze constructie bij de gegeven belasting F? Motiveer uw antwoord.

VRAAGSTUK 5 : Elasticiteitstheorie (ca 40 min)

Van een fictief, homogeen isotroop, plaatmateriaal is een proefstuk gemaakt waarvan de afmetingen in de onderstaande figuur zijn aangegeven. De plaatdikte is overal t. In het proefstuk heerst een homogene vlakspanningstoestand.



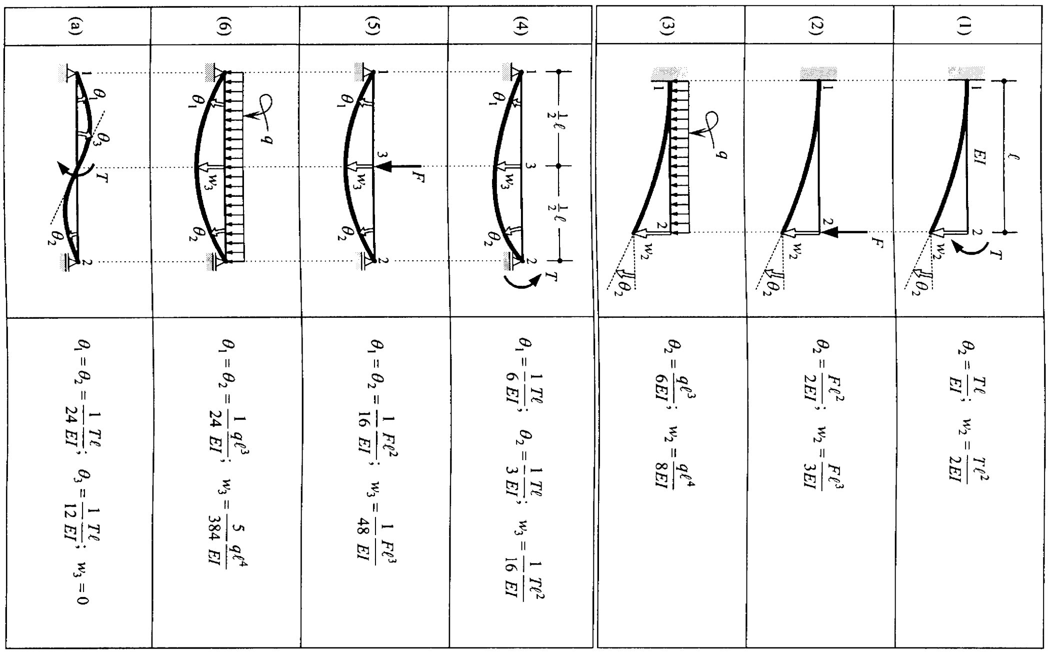
Gegevens : - op vlak AB werkt een drukspanning van 120 N/mm^2 en een schuifspanning van 30 N/mm^2. Op vlak BC werkt een drukspanning van 80 N/mm^2 en een schuifspanning van 50 N/mm^2
- E = 115000 N/mm^2, ν = 0,5 en f_y = 125 N/mm^2.

Opmerking : Maak gebruik van het meegeleverde formuleblad.

Vragen:

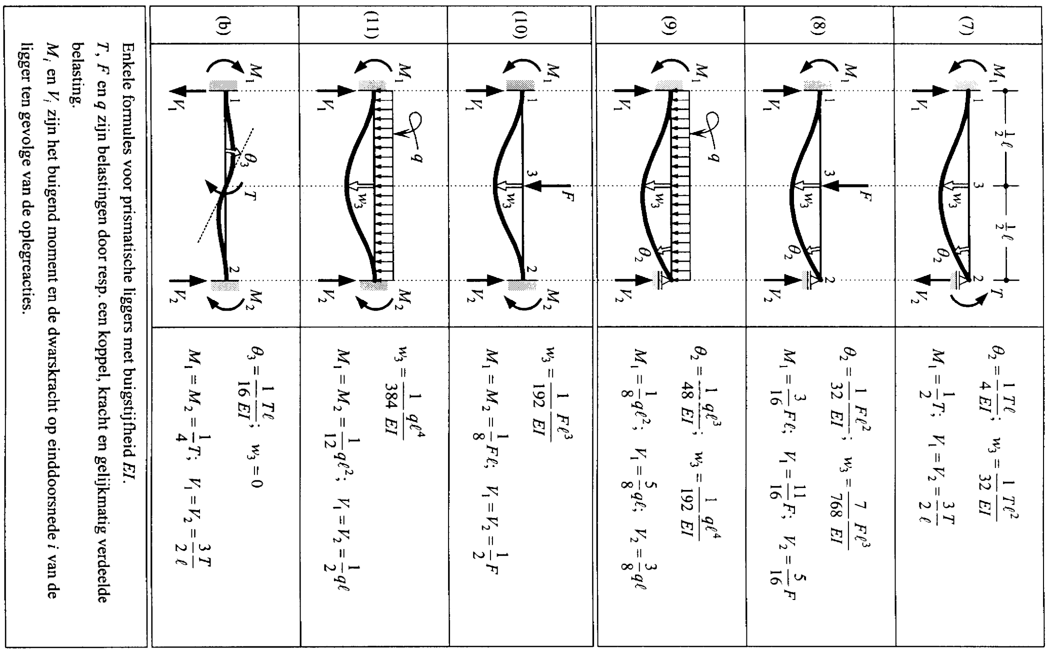
a) Teken de cirkel van Mohr voor de gegeven spanningstoestand, kies zelf een passende schaal. Geef duidelijk het Richtingen Centrum en de hoofdrichtingen aan. Geef ook alle relevante waarden in de cirkel aan.
b) Bepaal de grootte en richting van de spanningen op de vlakjes CD, DE en AF. Teken deze spanningen op de vlakjes zoals ze in werkelijkheid werken. De waarden van de spanningen mogen worden afgelezen uit de getekende cirkel.
c) Bepaal de rek (afgerond op 10^{-4}) van de vezels evenwijdig aan CD en ED.
d) Het plaatmateriaal volgt de vloeivoorwaarde van von Mises.
   - Wat is de achtergrond van deze vloeivoorwaarde ?
   - Welke veiligheidsmarge heeft deze spanningstoestand ?

FORMULEBLAD



vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)   *vergeet-mij-nietjes*

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)   *statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)*



Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\tfrac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \tfrac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_\mathrm{k}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_\mathrm{k} = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}} \quad \text{met}: \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha\cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_\mathrm{k} = \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2-4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met}: \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \dfrac{10}{\rho_1}\,;\ \rho_1 = \dfrac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \dfrac{10}{\rho_2}\,;\ \rho_2 = \dfrac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met}: \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

BEKNOPTE ANTWOORDEN

(geen modeluitwerking !)

OPGAVE 1

De algemene oplossing van de 4^e^ orde DV voor buigingsknik is:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI} \quad \text{en } S_z = -F \times C_2$$

De vier randvoorwaarden voor dit probleem zijn (geef schetsjes):

$$w(0) = 0$$
$$M(0) = M_{veer} = r \cdot \varphi(0) = -r \cdot w'(0)$$
$$M(a) = 0$$
$$S_z(a) = -F_{veer} = -k \cdot w(a)$$

Uitwerken van deze vergelijkingen levert:

1) $C_1 + C_3 = 0$
2) $FC_3 = -r(C_2 + C_4\alpha)$
3) $FC_3 \cos(\alpha a) + C_4 \sin(\alpha a) = 0$
4) $-FC_2 + kC_1 + kC_2 a + kC_3 \cos(\alpha a) + kC_4 \sin(\alpha a) = 0$

De kniklast kan worden gevonden door het nul stellen van de determinant van dit stelsel. Alleen dan kan een niet-triviale oplossing worden gevonden voor dit knikprobleem. Uitwerken werd verder niet gevraagd.

De stijfste constructie treedt op indien beide veren oneindig stijf zijn. Dit levert een maximale kniklast op van:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{a^2}$$

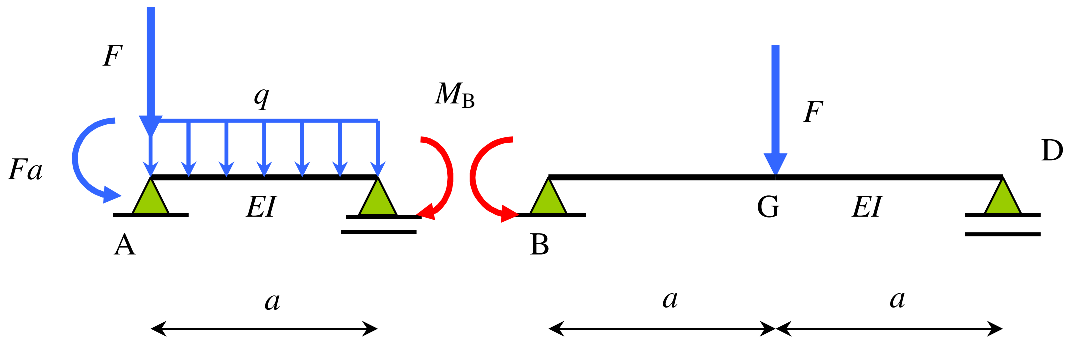
Het minst stijve geval treedt op voor $k = 0$. Dan ontstaat het bekende basisgeval:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r/a} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4a^2}}$$

OPGAVE 2

a) De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen. Als statisch onbepaalde wordt gekozen voor het overgangsmoment in B. De belasting op het overstek wordt statisch equivalent verplaatst naar knoop A. Schets is hier in de uitwerking niet gegeven maar is wel vereist.

b) Het schema ziet er als volgt uit:



Vormveranderingsvoorwaarde:

$$\varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BD}$$

$$-\frac{Fa \cdot a}{6EI} + \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_B a}{3EI} = \frac{M_B 2a}{3EI} - \frac{F(2a)^2}{16EI}$$

$$M_B = \frac{a\left(2F + qa\right)}{24} = 68 \text{ kNm}$$

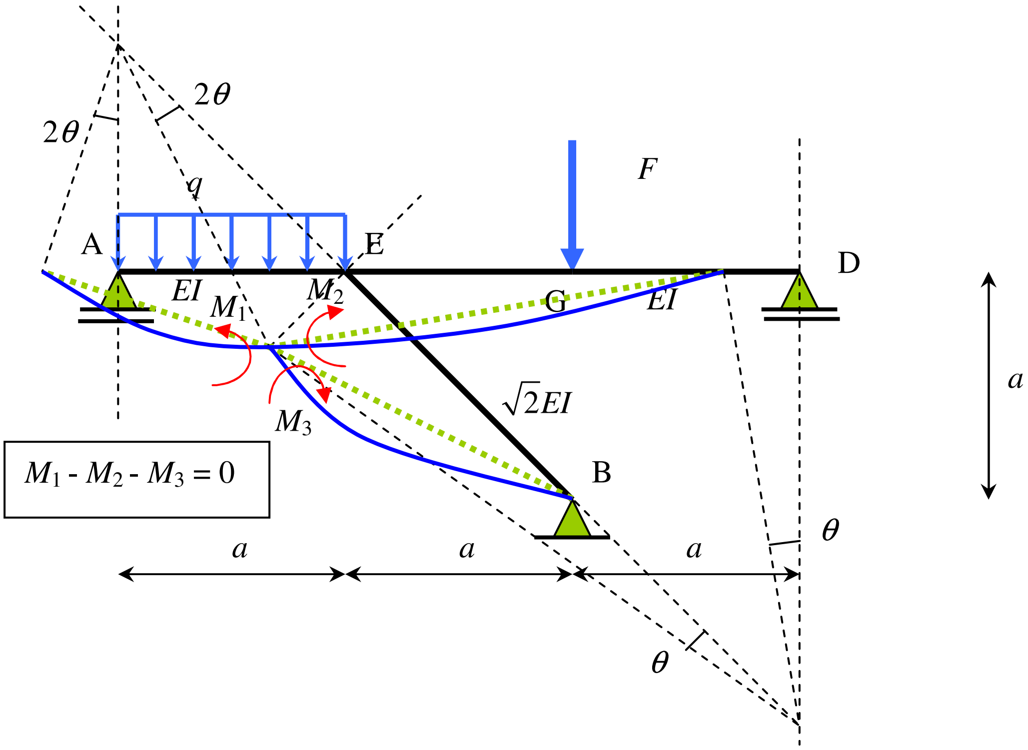
c) Momentenlijn en dwarskrachtenlijn moeten 100% zijn. Let op het parabolische deel en de knik in de *M*-lijn onder de puntlast. Overstekje niet vergeten!

d) Zakking mag worden bepaald m.b.v. de gegeven *vergeet-mij-nietjes*:

$$w = \frac{F(2a)^3}{48EI} - \frac{M_B(2a)^2}{16EI} = 0{,}0816 \text{ m}$$

OPGAVE 3

a) De verplaatste constructie is hieronder geschetst. De constructie is een constructie met verplaatsbare knopen. Dit is eenvoudig in te zien door alle starre verbindingen te vervangen door scharnieren. Er ontstaat dan een kinematisch onbepaald vakwerk (mechanisme). De blauwe lijn in de onderstaande figuur is de vervormde constructie.



b) Van de drie momenten op knoop E zijn er twee fundamenteel onbekend, de derde is te bepalen uit het knoopevenwicht. Daarnaast is de horizontale verplaatsing van de bovenregel een onbekende. Dit is de enige vrijheidsgraad in het mechanisme dat ontstaat als alle starre verbindingen worden vervangen door scharnieren. Uiteraard kan deze vrijheidsgraad ook worden beschreven m.b.v. een rotatie van een van de staven. In de bovenstaande figuur is het hier beschreven geheel weergegeven.
De drie onbekenden kunnen worden bepaald m.b.v. twee vormveranderingsvoorwaarde en de eis dat het mechanisme samen met de onbekende overgangsmomenten en belasting een evenwichtssysteem moeten vormen. Voor deze eis gebruiken we het gereedschap van de virtuele arbeid. Reductie van het aantal onbekende momenten m.b.v. het knoopevenwicht is niet nodig als het stelsel met de GR wordt opgelost. In dat geval kan direct het totaal worden ingevoerd en worden opgelost.

c) De vergelijkingen die moeten worden opgelost zijn:

$$\varphi_E^{AE} = \varphi_E^{EB} \qquad \frac{M_1 a}{3EI} + \frac{qa^3}{24EI} - 2\theta = \frac{-M_3 a\sqrt{2}}{3EI\sqrt{2}} + 2\theta$$

$$\varphi_E^{AE} = \varphi_E^{ED} \qquad \frac{M_1 a}{3EI} + \frac{qa^3}{24EI} - 2\theta = \frac{-M_2 2a}{3EI} - \frac{F(2a)^2}{16EI} + \theta$$

$$\Sigma T^E = 0 \qquad M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

$$\delta A = 0 \qquad -M_1 \cdot 2\delta\theta + qa \cdot 2\delta\theta \cdot \tfrac{1}{2}a - M_2 \cdot \delta\theta + F \cdot \delta\theta \cdot a - M_3 \cdot 2\delta\theta = 0$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgeschoond en als stelsel in de GR worden ingevoerd. Reductie zoals met de hand gebruikelijk is, is dan niet nodig.

d) De vormveranderingsvergelijkingen kunnen worden vermenigvuldigd met $\dfrac{24EI}{a}$:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & -\dfrac{96EI}{a} \\ 8 & 16 & 0 & -\dfrac{72EI}{a} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qa^2 \\ -qa^2 - 6Fa \\ qa^2 + Fa \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invullen levert:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & -240\times10^3 \\ 8 & 16 & 0 & -180\times10^3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -816 \\ -816-2448 \\ 816+408 \\ 0 \end{bmatrix}$$

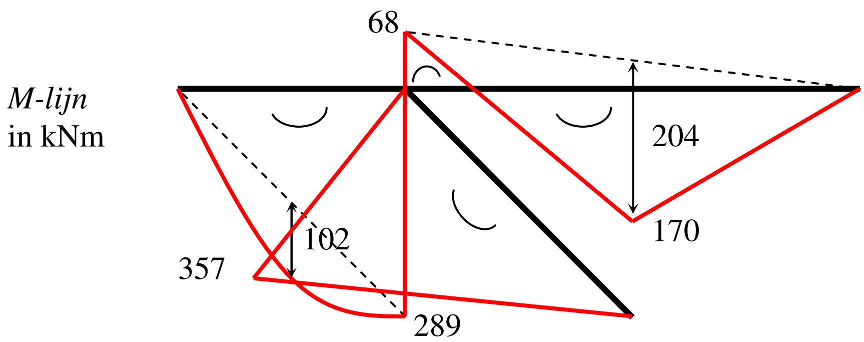
Oplossen met de GR levert (zie website voor handleidingen) :

$$M_1 = 289 \text{ kNm}; \quad M_2 = -68 \text{ kNm}; \quad M_3 = 357 \text{ kNm}; \quad \theta = \frac{187}{7500} = 0,024933;$$

De aangenomen richting van het moment M_2 blijkt onjuist te zijn geweest.

Opmerking:
De route die in het boek wordt uitgelegd is om eerst het knoopevenwicht te verwerken waardoor er twee onbekende momenten resteren en een rotatie. Vervolgens wordt de rotatie geëlimineerd uit de twee vormveranderingsvergelijkingen en het resultaat wordt gecombineerd met de uitkomst van de virtuele arbeidsvergelijking. Op deze manier resteert een systeem van twee vergelijkingen met twee onbekenden waaruit de momenten kunnen worden opgelost. Zonder reductie maar met gebruik van de GR lijkt het alsof er vier vergelijkingen met vier onbekenden moeten worden opgelost en dat zou kunnen suggereren dat dit een hele ingewikkelde som is maar het tegendeel is het geval!

e) Momentenlijn mag geen probleem opleveren. Let op het parabolische deel, de knik onder de puntlast en de juiste vervormingstekens.



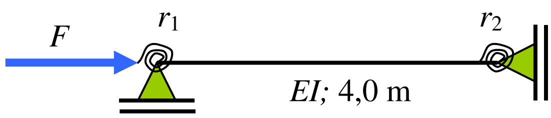
f) De verplaatsing van de knopen kan worden gevonden m.b.v. de opgeloste vrijheidsgraad θ. Knoop E zal naar links en naar beneden verplaatsen over een afstand van $a.\theta = 0,19467$ m.

OPGAVE 4

a) De constructie bestaat uit een ongeschoorde drukstaaf met rotatieveren aan boven en onderzijde. De kniklengte zal meer dan 4,0 meter bedragen. (ongeschoord volledig ingeklemd basisgeval 4,0 m, door veren minder stijf, lagere kniklast en daarmee grotere kniklengte)

Schets is noodzakelijk, hier niet gegeven.

b) De rotatieveren zijn te bepalen met de standaard *vergeet-mij-nietjes*. Dit levert het volgende model op.



De veerstijfheden zijn:

$$r_1 = \frac{3 \cdot 2EI}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{r_1 \cdot 4}{EI} = 6 \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = 4 + \frac{10}{6} = \frac{17}{3}$$
$$r_2 = \frac{3 \cdot 3EI}{3} + \frac{4 \cdot 4EI}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{r_2 \cdot 4}{EI} = \frac{100}{3} \quad \Rightarrow \quad \eta_2 = 4 + \frac{10}{33,33} = \frac{43}{10}$$

De kniklast wordt hiermee:

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{4^2} = 421,5 \text{ kN}$$

c) De kniklengte kan m.b.v. de formule van Euler worden bepaald:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \quad \Leftrightarrow \quad l_k = 4,84 \text{ m}$$

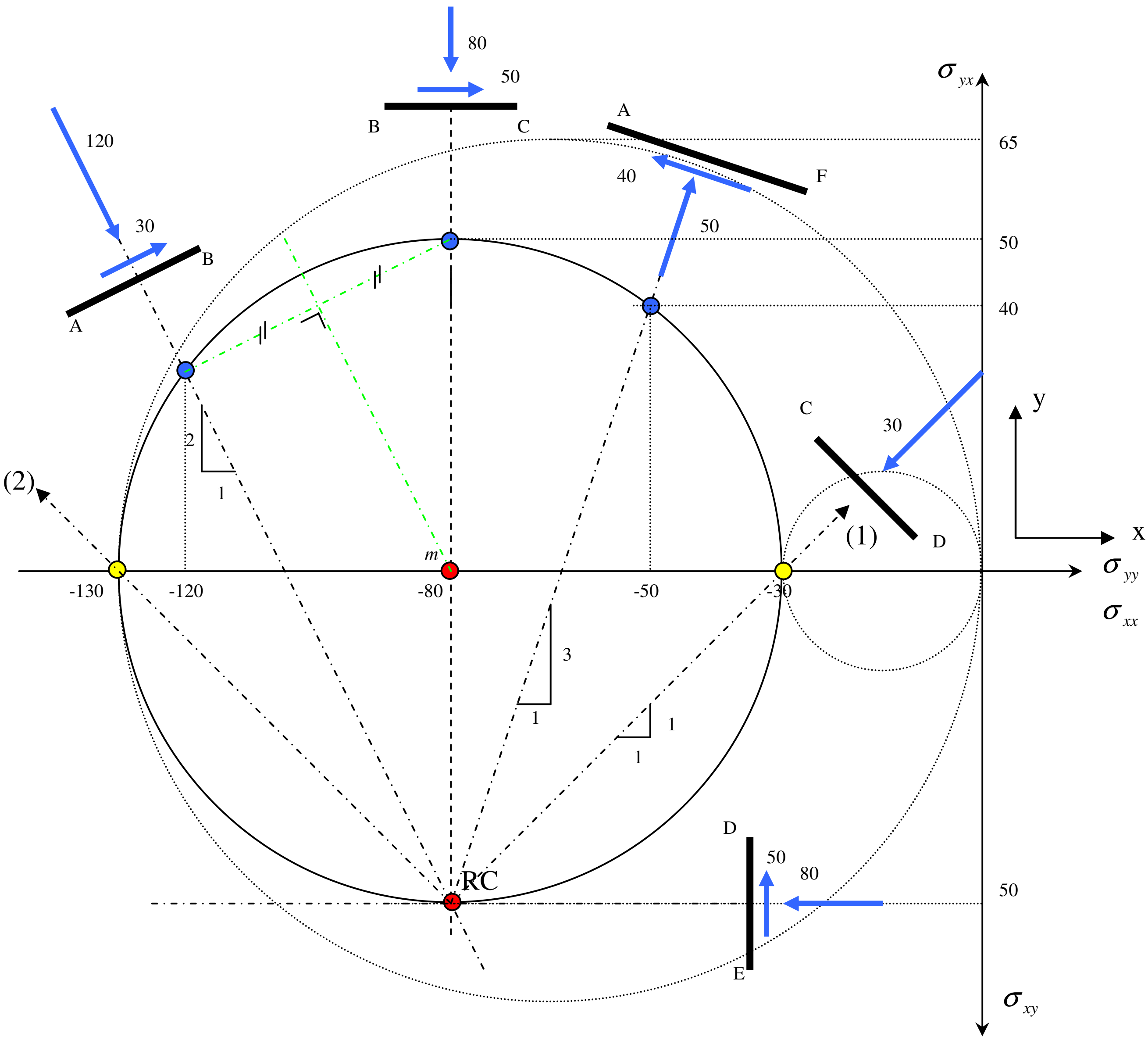
d) Bij de gegeven belasting van 100 kN kan de vergrotingsfactor worden bepaald:

$$\frac{n}{n-1} = \frac{\frac{F_k}{F}}{\frac{F_k}{F} - 1} = \frac{4,2}{4,2-1} = 1,31$$

Deze constructie is erg gevoelig voor 2^e orde effecten. Een initiële scheefstand zal met 31% aangroeien hetgeen in de praktijk niet acceptabel is.

OPGAVE 5

De cirkel van Mohr met daarop de spanningen op de diverse vlakken is hieronder weergegeven.



a) De spanningen op alle gevraagde vlakjes zijn in de cirkel weergegeven. De hoofdrichtingen (1) en (2) zijn tevens aangegeven. De hoofdspanningen zijn –30 en –130 N/mm^2.

b) Vezels evenwijdig aan CD zijn vezels die evenwijdig zijn aan de hoofdrichting (2). De hoofdrekken kunnen direct met de spannings-rek formules worden berekend :

$$\varepsilon^{\mathrm{CD}} = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} = \frac{-130-(0{,}50\times -30)}{115000} = -10{,}0\times 10^{-4}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} = 3{,}0\times 10^{-4}$$

Teken de rekcirkel en lees de rek voor vezels evenwijdig aan ED af :

$$\varepsilon^{\mathrm{ED}} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -3{,}5\times 10^{-4}$$ (R.C. zelfde locatie als in spanningscirkel)

c) Theorie zie dictaat. Hoofdspanningen zijn (0; -30; -130). De veiligheidsmarge volgt uit:

$$\frac{\gamma^2}{6}\left[(0+30)^2 + (-30+130)^2 + (-130-0)^2\right] \le \tfrac{1}{3}\times 125^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1{,}06$$