CTB1210

Dynamica & Modelvorming

Tentamenbundel Civiele Techniek

Het Gezelschap "Practische Studie"

LET OP! EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE VORMING

April 2017
Februari 2017
April 2016
Januari 2016
April 2015
Januari 2015

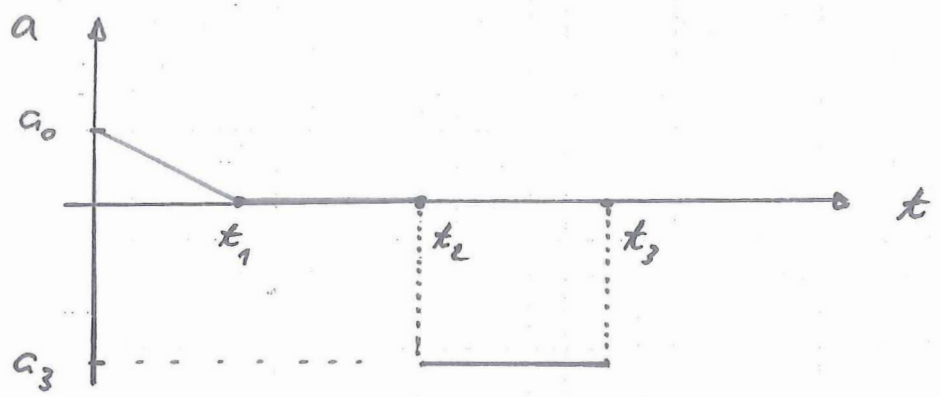
Vul dit schema in om een overzicht te hebben van welke onderwerpen van het vak al goed gaan en welke je nog moet oefenen

	April 2017		Februari 2017		April 2016		Januari 2016		April 2015		Januari 2015	
Vraag	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?	Onderwerp	Goed?
1												
2												
3												
4												
5												

Opgave 1

Een auto heeft op het moment $t = t_0 = 0$ s de snelheid $v_0 = 40$ m/s. De versnelling neemt lineair af van $a_0 = 5$ m/s^2 op tijdstip t_0 tot $a_1 = 0$ m/s^2 op tijdstip $t = t_1 = 6$ s. Vanaf het moment t_1 beweegt de auto eenparig en legt een afstand van $s_2 = 550$ m af (tijdstip $t = t_2$). Daarna wordt de auto met $a_3 = -11$ m/s^2 afgeremd tot stilstand (tijdstip $t = t_3$).

1.0p 1a Maak een duidelijk leesbare tekening van de versnelling als functie van de tijd. Geef daarin de genoemde tijdstippen en versnellingen aan. De tekening hoeft niet op schaal gemaakt te worden.



1.5p 1b Hoeveel seconden duurt het (geteld vanaf het moment t_0) totdat de auto tot stilstand komt?

$0 \le t \le t_1$: $a(t) = -\frac{a_0}{t_1} \cdot t + a_0 = -\frac{5}{6} t + 5$

$v(t) = -\frac{5}{12} t^2 + 5t + v_0$

$v(t_1) = 55$ m/s

$t_1 \le t \le t_2$: $v(\tau) = 55$ m/s = constant

$\Delta\tau = \frac{s_2}{55} = 10$ s

$\rightarrow t_2 = t_1 + \Delta\tau = 16$ s

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

$t_2 \le t \le t_3$: $a(\tau) = -11$; $v(\tau) = -11 \cdot \tau + 55$

$v(t_3) = v(\tau = t_3 - t_2) = 0 \rightarrow \tau = 5$ s

$\rightarrow$ $t_3 = t_2 + 5 = 21$ s

aut woord op vraag 1b

1.5p 1c Na welke afstand (gemeten vanaf het tijdstip t_0) komt de auto tot stilstand?

$0 \le t \le t_1$: $s(t) = -\frac{5}{36}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + v_0 \cdot t$

$s(t_1) = 300$ m

$t_1 \le t \le t_2$: $s(t_2) = s(t_1) + 550 = 850$ m

$t_2 \le t \le t_3$: $s(\tau) = -\frac{11}{2}\tau^2 + 55 \cdot \tau$

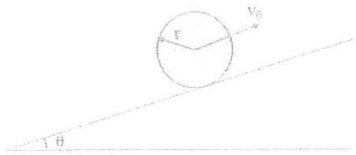
$s(\tau = 5) = 137{,}50$ m

$\rightarrow$ $s(t_3) = 850 + 137{,}50 = 987{,}50$ m

aut woord op vraag 1c

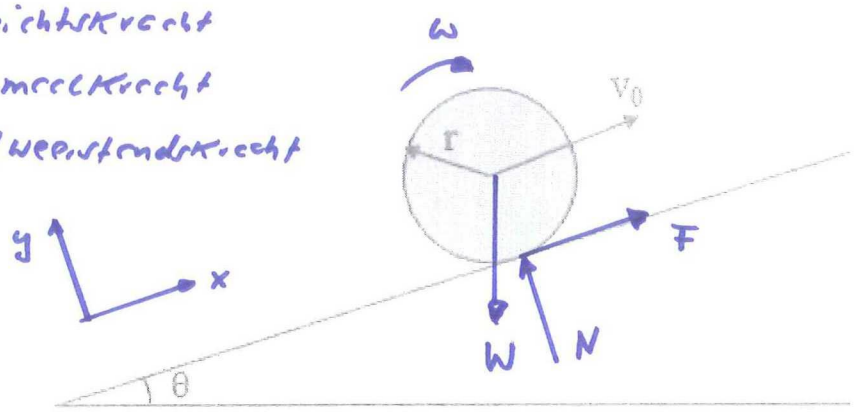
Opgave 2

Een massieve cilinder (straal $r = 0.50$ m, massa $m = 50$ kg, traagheidsmoment om een as loodrecht op het papieren vlak door het middelpunt $I_G = \frac{1}{2}mr^2$) rolt een helling op (hoek helling met horizontaal $\theta = 20°$). Aan de voet van de helling (tijdstip $t = 0$) heeft de cilinder een snelheid $v = v_0 = 5$ m/s. Gedurende de beweging is er sprake van zuiver rollen. Additionele gegevens: zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.



2.0p 2a Teken in onderstaande figuur zorgvuldig alle krachten **met bijbehorende richtingen** en geef de twee assen van een coördinatenstelsel van jou keuze aan.

W: gewichtskracht
N: normaalkracht
F: re/weerstandskracht



4.5p 2b Bereken het tijdstip $t = t_s$ waarop de cilinder tot stilstand komt.

eerste bewegingsvgl. $F - mg\sin\theta = M \cdot \ddot{x}_G$ (1)

$N - mg\cos\theta = 0$ (2)

tweede bewegingsvgl: $-F \cdot r = I_G \cdot \dot{\omega}$ (3)

bindingsvgl: $\ddot{x}_G = r \cdot \dot{\omega}$ (4)

(4) in (3) en (1) oplossen naar F:

$$F = -\frac{I_G \cdot \ddot{x}_G}{r^2} \quad (5)$$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

(5) in (1) en oplossen nav. $\ddot{x}_G$ (met $I_G = \frac{2}{5}mr^2$):

$$\ddot{x}_G = -\frac{2}{3}g.\sin\theta = -2{,}24\ m/s^2 = \text{constant}.$$

De versnelling is constant: $a = -2{,}24\ m/s^2$

$\rightarrow$ $v(t) = a.t + v_0$; $v(t = t_s) = 0 \rightarrow t_s = -\frac{v_0}{a}$

met $v_0 = 5\ m/s$ volgt dan: $\underline{\underline{t_s = 2{,}24\ s}}$ antwoord op vraag 2b

3.0p 2c Bereken met behulp van de wet van behoud van mechanische energie de afstand s, die de cilinder vanaf $t = 0$ langs de helling aflegt totdat deze tot stilstand is gekomen.

tijdstip $t = 0$: $T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_G.\omega_0^2$, $V_1 = 0$ (1)

tijdstip $t = t_s$: $T_2 = 0$; $V_2 = mg.s.\sin\theta$ (2)

rollen: $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ (3)

(3) in (1) ; behoud van mech. energie:

$$\frac{3}{4}mv_0^2 = mg.s.\sin\theta$$

$$\rightarrow \quad s = \frac{3v_0^2}{4g.\sin\theta} = \underline{\underline{5{,}59\ m}}$$ antwoord op vraag 2c

This answerbox belongs to the question on the previous page.

2.0p **2d** Bereken de rolweerstandskracht (soms ook wrijvingskracht genoemd) F_w op het moment $t = t_s$ tussen de cilinder en de ondergrond.

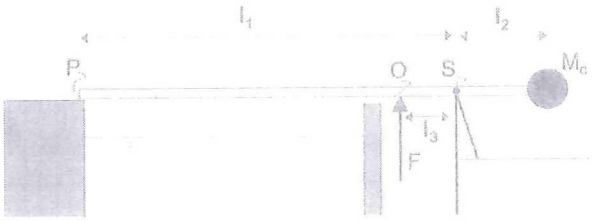
eerste en tweede bewegingswet en bindingsvgl.:

$$F = -\frac{I_G \cdot \ddot{x}_G}{r^2} = -\tfrac{1}{2} m \ddot{x}_G = \tfrac{1}{3} mg \sin\theta$$

$$\underline{\underline{F = 55{,}92\ N}}$$ antwoord op vraag 2d

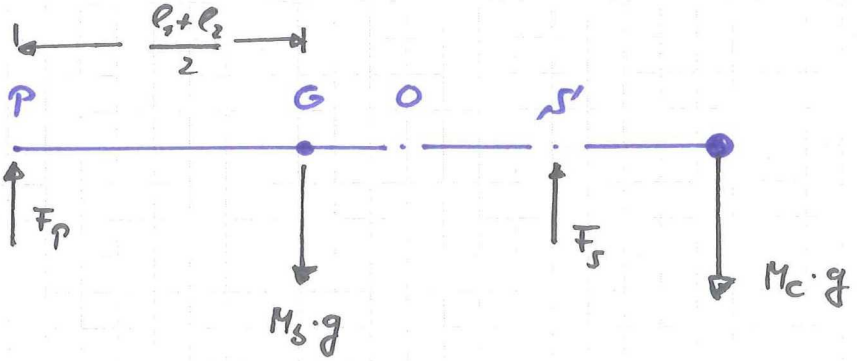
Opgave 3

Een basculebrug, zoals schematisch weergegeven in de figuur hiernaast, bestaat uit een slanke homogene balk met massa M_b, waarbij aan het uiteinde op een afstand l_2 van het scharnier in S een contragewicht met verwaarloosbare afmetingen en massa M_c bevestigd is. De brug kan wrijvingsloos draaien rond een horizontale as door het scharnier in S en wordt bediend met een hydraulisch systeem dat een kracht F kan leveren in het punt O op een afstand l_3 van S.
Gegevens: afstand scharnier-uiteinde $l_1 = 5.0$ m; afstand scharnier-contragewicht $l_2 = 1.0$ m; afstand scharnier-aangrijpingspunt kracht $l_3 = 0.5$ m; massa contragewicht $M_c = 5000$ kg; massa balk $M_b = 6000$ kg; zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.
Traagheidsmoment van een dunne stang van lengte L en massa m om het massamiddelpunt G, $I_G = \frac{1}{12}mL^2$.



Basculebrug

1.5p 3a Bepaal de kracht op het scharnierpunt S wanneer de brug dicht is en met het uiteinde op P rust. Er wordt dan in O geen kracht uitgeoefend. Geef het antwoord in kN.



omdat F_p niet bekend is, is het verstandig om de tweede bewegingsvgl. om P te gebruiken:

$$\curvearrowleft^{+} \quad \Sigma M_P = M_s \cdot g \cdot \frac{l_1+l_2}{2} - F_S \cdot l + M_c \cdot g\,(l_1+l_2) = 0$$

oplossen naar F_S:

$$F_S = g \cdot \frac{M_s \cdot \frac{l_1+l_2}{2} + M_c(l_1+l_2)}{l_1} = \underline{\underline{54{,}18\ \text{kN}}}$$

antwoord op vraag 3a

2.5p 3b Wat is het traagheidsmoment I_S van de brug om de horizontale as door S?

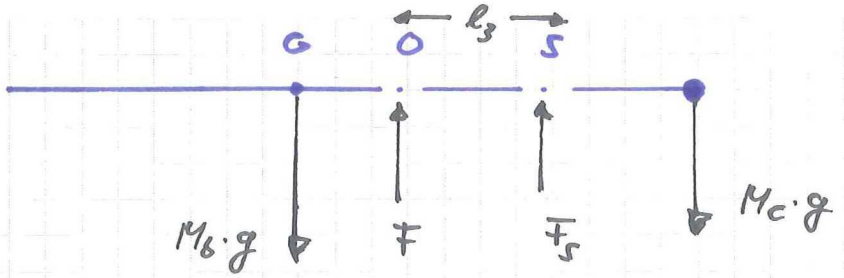
De brug bestaat uit een staaf en een puntmassa:

$$I_S = \frac{1}{12} M_b (l_1 + l_2)^2 + M_b \left(l_1 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right)^2 + M_c \cdot l_2^2$$

$$\underline{\underline{I_S = 4{,}7 \cdot 10^4 \text{ kg.m}^2}}$$ antwoord op vraag 3b

Om de brug te openen levert het openingsmechanisme een kracht $F = 150$ kN in verticale richting, die aangrijpt in het punt O.

1.5p 3c Bepaal de grootte van de hoekversnelling $\dot{\omega}$ in rad/s^2 van het brugdek als het uiteinde net vrijkomt van het oplossingspunt P. Neem hiervoor aan dat het antwoord op vraag b gelijk is aan $I_S = 5 \cdot 10^4$ kg m^2.



tweede bewegingswet om S: $I_S = 5 \cdot 10^4$ kg.m^2

$$\curvearrowleft^+ \quad \Sigma M_S = -M_b \cdot g \left(l_1 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) + F \cdot l_3 + M_c \cdot g \cdot l_2 = I_S \cdot \dot{\omega}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\dot{\omega} = 0{,}13 \text{ rad/s}^2}}$$

antwoord op vraag 3c

1.5p 3c Bepaal de grootte van de hoekversnelling $\dot{\omega}$ in rad/s^2 van het brugdek als het uiteinde net vrijkomt van het oplossingspunt P. Neem hiervoor aan dat het antwoord op vraag b gelijk is aan $I_S = 5 \cdot 10^4$ kg m^2.

4.0p 3d Bepaal voor het moment dat het uiteinde net vrijkomt van het oplossingspunt P de grootte (in kN) en richting van de kracht, die het scharnier in S moet opnemen. Neem hiervoor aan dat het antwoord op vraag c gelijk is aan $\dot{\omega} = 0.15$ rad/s^2.

Bij bekende hoekversnelling $\dot{\omega} = 0{,}15$ rad/s^2 kennen we ook de versnelling van het massa-middelpunt G' van de brug:

$$a_{G'} = \dot{\omega} \cdot \ell$$

Het massamiddelpunt G' ligt op afstand ℓ van S':

$$\ell = \frac{M_B \cdot \left(\ell_1 - \frac{\ell_1+\ell_2}{2}\right) + M_C(-\ell)}{M_B + M_C} = 0{,}636 \text{ m}$$

(d.w.z. links van S')

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

eerste bewegingsvgl. van de bug in y-richting:

$$F + F_S - M_S \cdot g - M_C \cdot g = (M_S + M_C) \cdot \ddot{y}_C$$

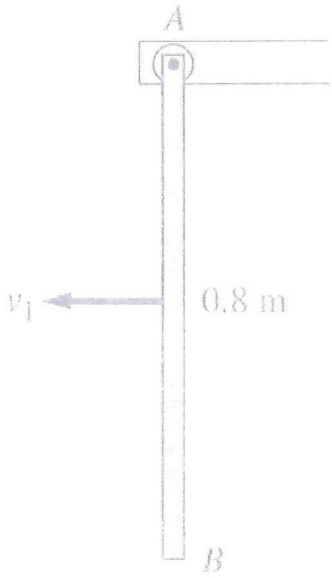
oplossen naar F_S:

$$F_S = -4{,}11 \cdot 10^4\ N = \underline{\underline{-41{,}1\ kN}}$$

de kracht wijst naar beneden (omlaag)

Opgave 4

Een dunne stang (massa $m = 10$ kg, lengte $l = 0.8$ m, traagheidsmoment om A $I_A = \frac{1}{3}ml^2$) glijdt in een sleuf naar links met een constante snelheid van $v_1 = 5.5$ m/s. Op een gegeven moment botst de stang in A tegen het einde van de sleuf aan zonder terug te kaatsen. Zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.



1.5p 4a Bereken de hoeksnelheid ω_1 van de stang onmiddelijk naar de botsing.

Tijdens de botsing is er sprake van impulsmoment-behoud om A:

$$M \cdot v_1 \cdot \frac{\ell}{2} = I_A \cdot \omega_1 \longrightarrow \omega_1 = \frac{M v_1 \cdot \ell}{2 I_A} \quad (1)$$

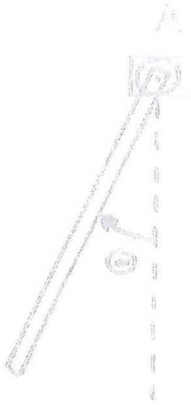
$$I_A = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M \ell^2 \quad (2)$$

(2) in (1):

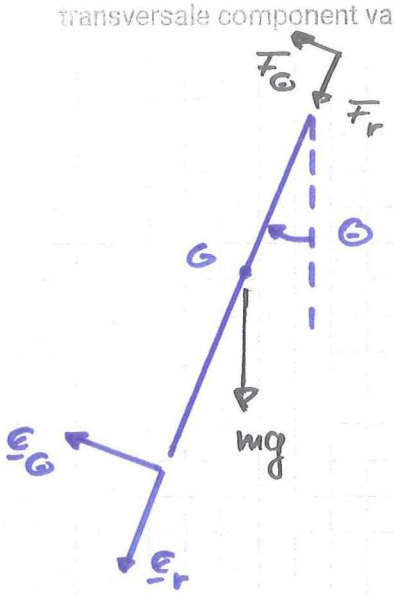
$$\omega_1 = \frac{3 v_1}{2 \ell} = 10{,}31 \text{ rad/s}$$

antwoord op vraag 4a

Na de botsing roteert de stang om A rechtsom. De hoeksnelheid voor een willekeurige hoekstand θ (geteld vanaf de verticale richting positief rechtsom, zie tekening) is gegeven door
$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)}$.



4.5p 4b Stel het anwoord op vraag a is $\omega_1 = 10$ rad/s. Bereken voor een hoekstand van $\theta = 20°$ de radiale en transversale component van de kracht in het punt A.



eerste bewegingswet:

$F_r + mg\cos\theta = m \cdot a_{G,r}$ (1)

$F_\theta - mg\sin\theta = m \cdot a_{G,\theta}$ (2)

kinematica:

$a_{G,r} = -\frac{\ell}{2}\omega^2$; $a_{G,\theta} = \frac{\ell}{2}\dot{\omega}$ (3)

(3) in (1) en (2): $F_r = -mg\cos\theta - m\frac{\ell}{2}\omega^2$ (4)

$F_\theta = mg\sin\theta + m\cdot\frac{\ell}{2}\dot{\omega}$ (5)

uit $\omega^2 = \omega_1^2 - \frac{3g}{\ell}(1-\cos\theta)$ volgt

$2\omega\cdot\dot{\omega} = 0 - \frac{3g}{\ell}(\sin\theta)\cdot\omega$ ofwel

$\dot{\omega} = -\frac{3g}{2\ell}\cdot\sin\theta$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

$\theta = 20°$: $\dot{\omega} = -6{,}29 \text{ rad/s}^2$

$\omega = 9{,}89 \text{ rad/s}$

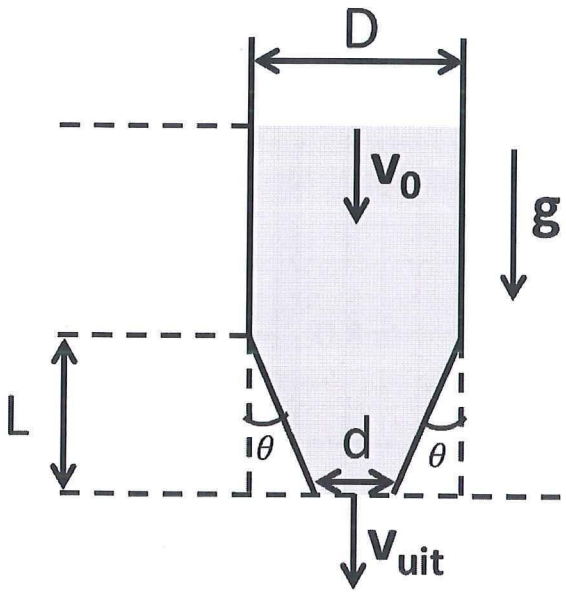
invullen in (4) en (5) :

$F_r = -483{,}31 \text{ N}$ ‖ antwoord op vraag 46

$F_\theta = 8{,}35 \text{ N}$ ‖

Opgave 5

Een rond vat met diameter D aan de bovenzijde en diameter d aan de onderzijde (zie tekening) loopt leeg met een constante snelheid v_0 aan de bovenzijde. De zwaartekrachtversnelling is g.



3.0p **5a** Leid de snelheid v_{uit} van het water dat uit het tuitje komt af als functie van D, d en v_0, gebruikmakend van de wet van behoud van massa als startvergelijking. Geef voor elke stap aan, welke aannames gedaan worden.

wet van behoud van massa door een stroombuis (geen energie verlies)

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{in}}{dt} - \frac{dm_{uit}}{dt}$$

water onsamendrukbaar : $dm/dt = 0$ dus $\frac{dm_{in}}{dt} = \frac{dm_{uit}}{dt}$

definitie $m = \rho V$ en ρ = constant

$$\rho \underbrace{\frac{dV_{in}}{dt}}_{Q_{in}} = \rho \underbrace{\frac{dV_{uit}}{dt}}_{Q_{uit}}$$

$Q_{in} = \pi \frac{D^2}{4} v_0$ $\quad Q_{uit} = \pi \frac{d^2}{4} v_{uit}$ $\quad$ dus $\quad v_{uit} = v_0 \frac{D^2}{d^2}$

2.0p **5b** De snelheid v_{uit} is o.a. afhankelijk van de hoek θ (zie tekening). Stel dat $v_{\text{uit}} = v_a$ wanneer $\theta = \theta_a$ en $v_{\text{uit}} = v_b$ wanneer $\theta = \theta_b$. Geef v_b aan als functie van v_a, θ_a, θ_b, L en D.

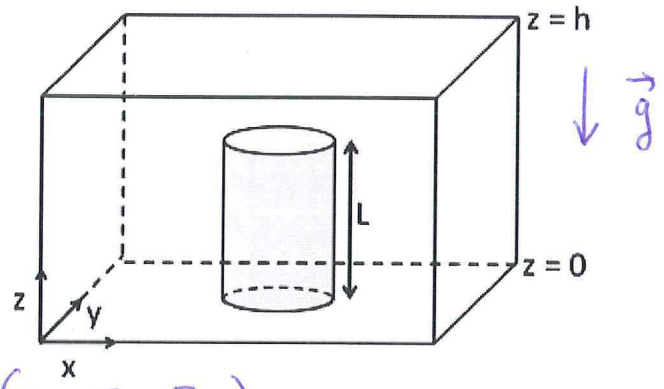
$$\frac{D}{2} = L \sin\theta + \frac{d}{2}$$

$$v_A = v_0 \frac{D^2}{d^2} = v_0 \frac{D^2}{[D - 2L\sin\theta_A]^2}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \left[\frac{D - 2L\sin\theta_A}{D - 2L\sin\theta_B}\right]^2$$

Opgave 6

We beschouwen een cilinder met diameter d en hoogte L, die op de bodem van een bak staat. De bak is gevuld met water (dichtheid ρ_w) tot een hoogte h (zie tekening). De luchtdruk op hoogte $z = h$ is P_0. g is de zwaartekrachtversnelling. We nemen eerst aan dat het water stil staat.



$(F_{A,x}; F_{Ay}; F_{A,z})$

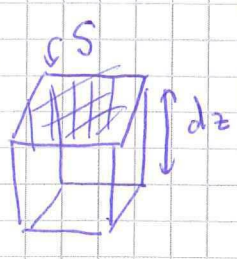
1.0p **6a** Geef de formule aan voor de kracht van Archimedes op de cilinder als functie van d, L, ρ_w en g.

volume cilinder : $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot L = V$

$\vec{F}_{Archimedes} = \rho_w V \vec{g} = \rho_w \left(\frac{d}{2}\right)^2 L \vec{g}$

$$\begin{cases} F_{A,x} = 0 \\ F_{A,y} = 0 \\ F_{A,z} = \rho_w \left(\frac{d}{2}\right)^2 L g \end{cases}$$

2.0p **6b** Geef de formule aan voor het drukprofiel $P = P(z)$ als functie van P_0, ρ_w, g, h en z. Opmerking: begin met de tweede wet van Newton voor een klein ~~volume~~ kubus (waarvan alle vlakken een oppervlakte S hebben) water. Vervolgens gebruik je het feit dat het water stilstaat.



$P(z = h) = P_0$

$m\vec{a} = -\frac{dP}{dz} S\, dz\, \vec{e}_z + m\vec{g}$

$\rho_w = \frac{m}{S\, dz}$ geen versnelling (water staat stil)

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

$$\int_z^h dP(z) = -\int_z^h \rho_w g \, dz$$

$$P(z) = P_0 + \rho_w g (h - z)$$

2.0p **6c** Geef de x-, y- en z-component aan van de drukkracht, die wordt uigeoefend op de cilinder als functie van d, L, ρ_w en g.

De drukkracht is het zelfde als de Archimedes kracht!
Kan ook worden afgeleid:

$$d\vec{F} = -\frac{dP}{dz} S \, dz \, \vec{e}_z \qquad S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\vec{F} = \pi \frac{d^2}{4} \int_0^L \rho_w g \, dz \, \vec{e}_z = \pi \frac{d^2}{4} \rho_w g L \vec{e}_z$$

$$F_x = 0 \qquad F_z = \pi \frac{d^2}{4} \rho_w g L$$

$$F_y = 0$$

Questions

1	2	3	4	5

Student ID

1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
0	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Name student

_____

CTB1210 Dynamica & Modelvorming (2016-2017 Q2)

CTB1210 tentamen 2 februari januari 2017

02 February 2017, 09:00 - 12:00

1. Vul op het voorblad van het antwoordformulier uw naam, voorletters en studienummer in.

2. Het tentamen bestaat uit 5 vraagstukken. Lees iedere vraag goed alvorens te antwoorden.

3. Elk vraagstuk bestaat uit meerdere deelopgaven. Indien niet anders vermeld, zijn deze onafhankelijk van elkaar op te lossen.

4. Alleen toegestaan is een (grafische) rekenmachine en het formuleblad op blackboard.

5. Het antwoord van elk vraagstuk dient in het bijbehorende kader te worden ingevuld. Aantekeningen buiten het kader tellen niet mee bij de beoordeling van het werk. Komt u ruimte te kort meld u zich bij de surveillanten.

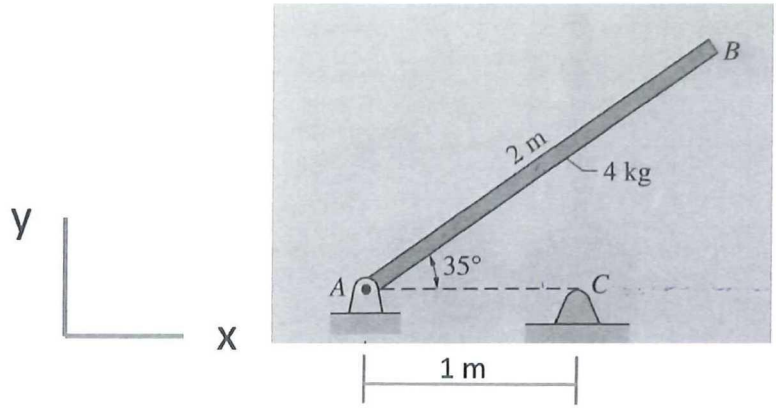
6. Indien niet anders vermeld, moeten allen getallen op twee decimalen nauwkeurig worden afgerond en met de juiste SI eenheid worden voorzien.

7. Begin met de vraagstukken/deelvragen waar u snel een oplossing van kunt vinden.

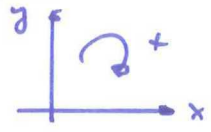
8. Veel succes.

Opgave 1

Een homogene dunne stang (massa $m = 4$ kg, lengte $L = 2$ m, traagheidsmoment om zijn massamiddelpunt G, $I_G = \frac{1}{12}mL^2$) roteert om een pin in A. De stang wordt vanuit rust op de getoonde positie losgelaten en botst tegen de obstructie in C. Zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.



2p **1a** De hoeksnelheid van de stang onmiddelijk voor de botsing is ω_2. Bereken $|\omega_2|$. Verwaarloos de wrijvingskrachten in de pin A.



Behoud van mechanische energie: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$T_1 = 0$, $V_1 = mg\frac{L}{2}\sin 35°$

$T_2 = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2 = \frac{1}{2}I_A\omega_2^2 = \frac{1}{6}mL^2\omega_2^2$, $V_2 = 0$

$\rightarrow$ $mg\frac{L}{2}\sin 35° = \frac{1}{6}mL^2\omega_2^2$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin 35°} = 2{,}91$ rad/s $\circlearrowright$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

Neem aan dat $|\omega_2| = 3$ rad/s. Stel dat als gevolg van de botsing 30% van de kinetische energie verloren gaat. Bereken onder deze aaname:

2p **1b** de hoeksnelheid onmiddelijk na de botsing, ω_3.

$\omega_2 = 3$ rad/s ; $T_2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega_2^2$, $T_3 = 0{,}7 \cdot T_2 = 16{,}80$ Nm

Na einde van de botsing roteert de staaf om A linksom met beginhoeksnelheid ω_3 :

$$T_3 = \tfrac{1}{6} m l^2 \omega_3^2 \rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{6 T_3}{m l^2}} = 2{,}51 \text{ rad/s}$$

Alternatieve oplossing : bij een pure rotatie is $T \sim \omega^2$

Omdat $T_3 = 0{,}7\, T_2$ volgt hieruit $\omega_3^2 = 0{,}7 \cdot \omega_2^2$.

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

3p **1c** de stoot in C. Neem hiervoor aan dat het antwoord op vraag b) $\omega_3 = 2.4$ rad/s linksom is.

Stootmoment - impulsmoment vergelijking om A:

$$-\int C \cdot dt \cdot \frac{L}{2} = \underline{\underline{I}}_A \omega_3 - \underline{\underline{I}}_A \omega_2$$

$$\rightarrow \int C \cdot dt = -\frac{2}{L} \underline{\underline{I}}_A (\omega_3 - \omega_2)$$

$\omega_2 = 3$ rad/s, $\omega_3 = -2{,}4$ rad/s, $\underline{\underline{I}}_A = 5{,}33$ kg.m^2

$$\rightarrow \int C \cdot dt = 28{,}80 \text{ N.s}$$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

1p **1d** de stoot in A. Neem hiervoor aan dat het antwoord op vraag b) $\omega_3 = 2.4$ rad/s linksom is.

Stootmoment - impulsmoment vergelijking om C (= G):

$$\int A \cdot dt \cdot \frac{L}{2} = I_G(\omega_3 - \omega_2)$$

$$\int A \cdot dt = \frac{2}{L} I_G(\omega_3 - \omega_2)$$

$\omega_2 = 3{,}0$ rad/s, $\omega_3 = -2{,}4$ rad/s, $I_G = 1{,}33$ kg.m^2

$$\int A\,dt = -7{,}20 \text{ Ns}$$

Controle: stoot-impuls vergelijking, y-component:

$$\int A\,dt + \int C \cdot dt = m \cdot v_{G,3} - m v_{G,2}$$
$$= m(v_{G,3} - v_{G,2})$$

$v_{G,3} = \frac{L}{2}|\omega_3| = 2{,}40$ m/s (↑)

$v_{G,2} = -\frac{L}{2}|\omega_2| = -3{,}00$ m/s (↓)

$$\rightarrow \int A\,dt + \int C \cdot dt = 21{,}60 \text{ Ns}$$

Na einde van de botsing roteert de stang tegen de wijzer van de klok in (d.w.z. linksom). Stel, $\omega_3 = 2.4$ rad/s linksom. Bereken op het moment dat de stang met de x-as voor het eerst na de botsing een hoek maakt van $\theta = 10°$,

3p **1e** de absolute waarde van de hoeksnelheid, $|\omega_4|$. Geef aan op de stang op dat moment linksom of rechtsom roteert.

Schoud van mechanische energie:

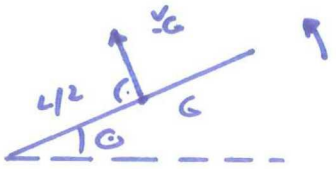
$$T_1 + V_1 = \tfrac{1}{2} I_A \omega_3^2 + 0$$

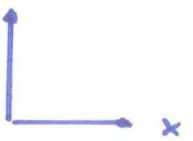
$$T_2 + V_2 = \tfrac{1}{2} I_A \omega_4^2 + mg \tfrac{L}{2} \sin 10°$$

$$\rightarrow \quad \omega_4^2 = \frac{\tfrac{1}{2} I_A \omega_3^2 - mg \tfrac{L}{2} \sin 10°}{\tfrac{1}{2} I_A} = \omega_3^2 - \frac{mgL \cdot \sin 10°}{I_A}$$

$\omega_4 = 1{,}79$ rad/s linksom

1p **1f** de x- en y-component van de snelheidsvector van het massamiddelpunt G van de stang.



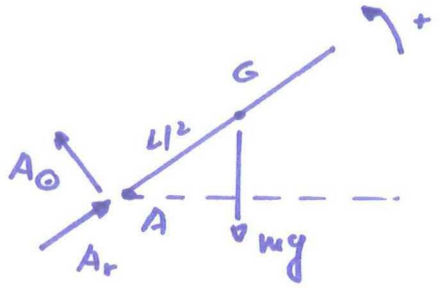


$\dot{x}_G(\theta = 10°) = -\omega_4 \cdot \frac{L}{2} \sin 10°$

$\dot{y}_G(\theta = 10°) = \omega_4 \frac{L}{2} \cos 10°$

Stel $\omega_4 = 2.2$ rad/s tegen de wijzers van de klok in (d.w.z., linksom).

3p **1g** Bereken de radiale en transversale component van de scharnierkracht in pin A op het moment dat de stang met de x-as voor het eerst na de botsing een hoek maakt van $\theta = 10°$.



beweging vgl. voor een rotatie om A:

$A_r - mg \sin 10° = -m \frac{L}{2} \omega_4^2$ (1)

$A_\theta - mg \cos 10° = m \cdot \frac{L}{2} \dot{\omega}_4$ (2)

rotatievgl:

$-mg \frac{L}{2} \cos 10° = I_A \dot{\omega}_4$

$\Rightarrow \dot{\omega}_4 = -7{,}25 \text{ rad/s}^2$ (3)

(3) in (1), (2):

$A_r = -12{,}55 \text{ N}$

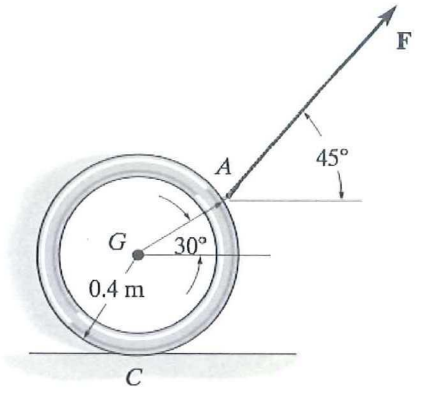
$A_\theta = 9{,}66 \text{ N}$

This answerbox continues on the next page.

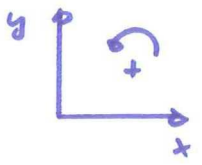
This answerbox belongs to the question on the previous page.

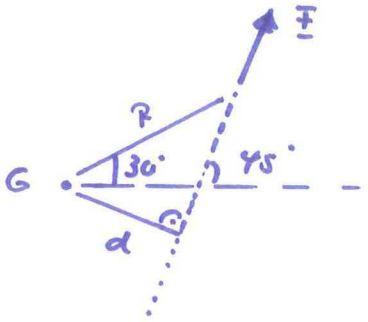
Opgave 2

En kracht F werkt op een dunne ring zoals aangegeven in het figuur. De massa van de ring is $m = 5$ kg, de straal is $R = 0.4$ m en het traagheidsmoment om zijn massamiddelpunt G is $I_G = mR^2$.



3p **2a** Bereken de maximale waarde van de kracht F die mogelijk is zonder dat de ring begint te slippen.





$d = R \cdot \cos 75° = 0{,}104$ m

bewegingsvgl. voor een rollende ring:

$F_W + F \cdot \cos 75° = m\ddot{x}_G$ (1)

$N - mg + F \cdot \sin 75° = 0$ (2)

$F_W \cdot R + F \cdot d = I_G \cdot \alpha = mR^2\alpha$ (3)

bindingsvgl: $\ddot{x}_G = -R \cdot \alpha$ (4)

rollen wanneer $|F_W| < \mu_s \cdot N$

N uit (2): $|F_W| < \mu_s (mg - F \sin 75°)$ (5)

(1)·R + (3): $F_W = -F \cdot \dfrac{d + R\cos 75°}{2R}$ (6)

$\rightarrow |F_W| < \dfrac{2R\mu_s \cdot mg}{(d + R\cos 75°) + 2R\mu_s \sin 75°} = 15{,}71$ N

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

Stel dat $F = 10$ N. Neem aan dat de ring in dit geval niet slipt.

1p **2b** Bereken de absolute waarde van de wrijvingskracht F_w in het contactpunt C. Geef de richting van de wrijvingskracht aan.

$F = 10$ N. Vergelijking (6) uit a) levert:

$$F_w = -F \cdot \frac{d + R\cos 45^\circ}{2R}, \quad d = R \cdot \cos 75^\circ$$

$|F_w| = 4{,}83$ N ; F_w wijst naar links

2p **2c** Stel $F_w = 5$ N naar links wijzend. Bereken de absolute waarde van de lineaire versnelling van het massamiddelpunt van de ring, a_G, en geef de richting hiervan aan.

$|F_w| = 5$ N. Volgens de definitie van het coördinatenstelsel uit deelopgave a) is $F_w = -5$ N. Vgl. (1) uit deelopgave a) levert:

$$\ddot{x}_G = \frac{F_w + F \cdot \cos 45^\circ}{m} = \frac{-5 + 10 \cdot \cos 45^\circ}{5} = 0{,}41 \text{ m/s}^2$$

Als correct wordt ook volgende oplossing geaccepteerd:

$$\ddot{x}_G = -\frac{F_w \cdot R + F \cdot d}{mR} = 0{,}48 \text{ m/s}^2$$

Reden: in 2c hadden we F_w niet meer mogen kiezen omdat F als bekend is verondersteld. Daardoor zijn de resultaten uit vgl. (1) - (4) niet meer consistent.

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

2p **2d** Stel, $a_G = 0.5$ m/s^2 naar rechts wijzend. Bereken de lineaire snelheid van het massamiddelpunt G nadat zich de ring om 1 m heeft verplaatst. De ring was aan het begin in rust.

$\ddot{x}_G = a_G = 0{,}5\ m/s^2$; $a_G = \frac{d\dot{x}_G}{dt} = \frac{d\dot{x}_G}{dx_G} \cdot \dot{x}_G$

$\int_0^{x_G} a_G \cdot ds = \frac{1}{2}\dot{x}_G^2 \rightarrow \dot{x}_G = \sqrt{2 \cdot a_G \cdot x_G}$

$x_G = 1\ m$; $a_G = 0{,}5\ m/s^2 \rightarrow \underline{\dot{x}_G = 1{,}00\ m/s}$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

1p **2e** Stel, $a_G = 0.5$ m/s^2 naar rechts wijzend. Hoe lang duurt het totdat het massamiddelpunt G een snelheid van 1 m/s heeft? De ring was aan het begin in rust.

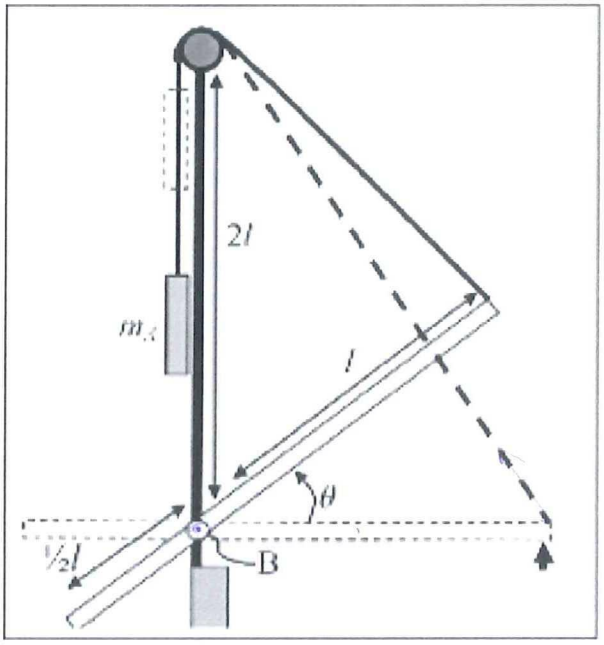
$\ddot{x}_G = a_G = 0{,}5 \text{ m/s}^2$

$a_G = \frac{d\dot{x}_G}{dt} \rightarrow \int_0^t a_G \cdot dt = \int_0^1 d\dot{x}_G$

$a_G \cdot t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{a_G} = 2{,}00 \text{ s}$

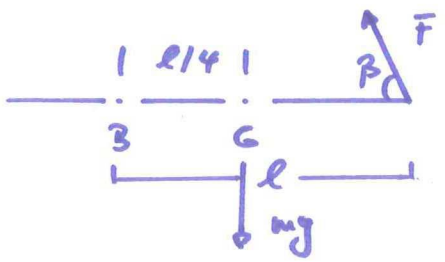
Opgave 3

Het ontwerp voor een nieuw te bouwen voetgangersbrug staat hiernaast geschetst. Het brugdek, hier op de vatten als een homogene slanke staaf (massa $m = 2000$ kg, lengte $1.5l = 18$ m), kan scharnieren om de horizontale as door B. Het openen en sluiten van de brug wordt bepaald door de massa m_A, die via een wrijvingsloze katrol een kracht op het uiteinde van de brug uitoefent. Voordat deze brug gebouwd kan worden, zal eerst het krachtenspel in de constructie bekeken moeten worden. Hiertoe bekijken we een aantal omstandigheden waaraan de brug kan worden blootgesteld. In de figuur zijn twee situaties weergegeven: de rusttoestand ($\theta = 0°$) met stippellijnen en de geopende toestand ($\theta = 30°$) met getrokken lijnen. Zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.



2p **3a** Wat is de maximale massa m_A waarbij het brugdek vanuit horizontale positie ($\theta = 0°$) nog net niet in beweging komt?

geen beweging van het brugdek : momentensom om B is 0.



$\Sigma M_B = mg \cdot \frac{l}{4} - F \sin\beta \cdot l \overset{!}{=} 0$

Omdat m_A niet beweegt geldt

$F = m_A \cdot g$

$\rightarrow m_A = \frac{m}{4 \cdot \sin\beta}$

Van de hoek β geldt: $\tan\beta = \frac{2l}{l} \Rightarrow \underline{\beta = 63{,}43°}$

$\rightarrow \underline{\underline{m_A = 559{,}02 \text{ kg}}}$

This answerbox continues on the next page.

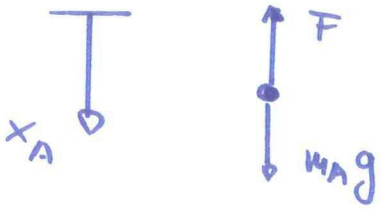
This answerbox belongs to the question on the previous page.

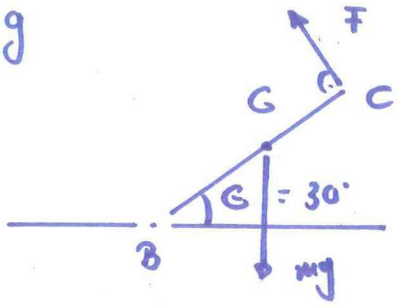
Op een gegeven moment wordt de massa m_A verzwaard tot 650 kg en komt de brug in beweging vanuit de rustpositie ($\theta = 0°$). Hierbij verwaarlozen we effecten van wrijving.

4p **3b** Bepaal de hoekversnelling van het brugdeel op het moment dat $\theta = 30°$. Bedenk dat in deze stand de kabel een kracht loodrecht op het brugdek uitoefent en houdt er rekening mee dat m_A ook een versnelde beweging uitvoert.

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.





rotatievgl. van het buigdek om B (geldt alleen voor $\theta = 30°$!) :

$$-mg\frac{\ell}{4}\cos 30° + F.\ell = I_B\,\dot{\omega}(\theta = 30°) \qquad (1)$$

Kracht F is niet gelijk aan gewicht van m_A omdat m_A versneld beweegt. Uit de translatievgl. van m_A volgt :

$$m_A \cdot g - F = m_A \cdot \ddot{x}_A \qquad (2)$$

Op het moment $\theta = 30°$ staat F loodrecht op het buigdek. Op dit moment is dus de translatieversnelling versnelling van punt C gelijk aan de versnelling $\ddot{x}_A$:

$$\ddot{x}_A = \ell \cdot \dot{\omega}(\theta = 30°) \qquad (3)$$

Uit (1) - (3) volgt :

$$\dot{\omega}(\theta = 30°) = 0{,}15\ \text{rad/s}^2$$

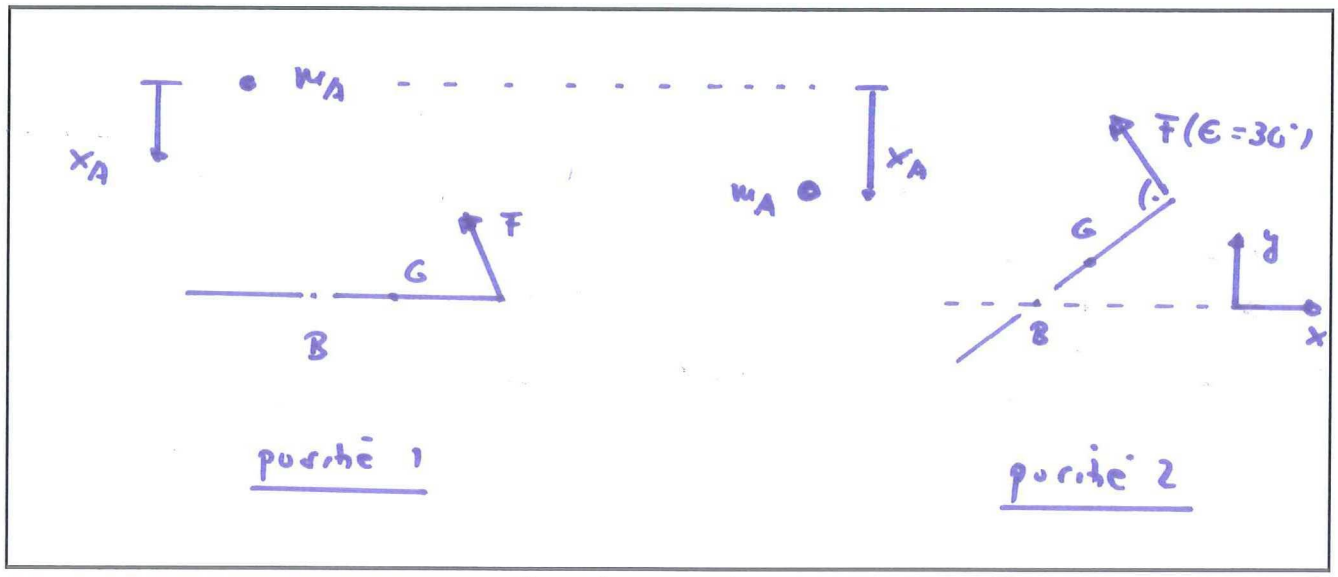
Hierbij we gebruik hebben gemaakt van

$$I_B = \frac{1}{12}m\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2 + m\cdot\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}m\ell^2$$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

5p **3c** Bereken de hoeksnelheid van het brugdeel bij $\theta = 30°$ door gebruik te maken van behoud van mechanische energie voor het stelsel bestaande uit massa m_A en brugdek.



This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

positie 1: $T_1 + V_1 = 0$

positie 2: $T_2 = \frac{1}{2} m_A \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} I_B \cdot \omega_2^2$

$\dot{x}_A = \omega_2 \cdot \ell$

$V_2 = - m_A g \cdot x_A + mg \cdot y_G$

$x_A = \theta \cdot \ell = \frac{30 \cdot \pi}{180} \cdot \ell$

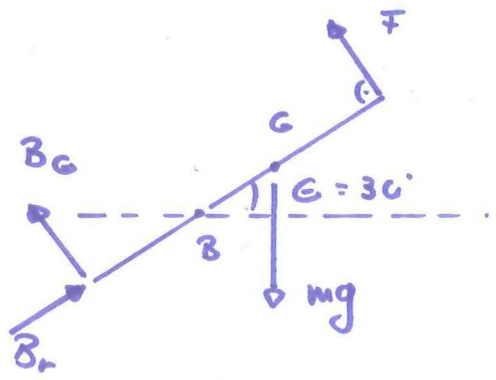
$y_G = \frac{\ell}{4} \cdot \sin 30°$

behoud van mech. energie:

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2g(m_A x_A - m \cdot y_G)}{I_B + m_A \ell^2}} = \underline{\underline{0{,}36 \text{ rad/s}}}$

4p **3d** Bereken de grootte van de totale kracht in het scharnier B op het moment dat $\theta = 30°$. Neem hierbij aan dat het antwoord op vraag 3b gelijk is aan $\dot{\omega} = 0.2$ rad/s^2 (linksom) en het antwoord op vraag 3c gelijk is aan $\omega = 0.4$ rad/s (linksom). Geef het antwoord in kN op twee decimalen nauwkeurig.



$\omega(\theta = 30°) = 0{,}4$ rad/s ↺

$\dot{\omega}(\theta = 30°) = 0{,}2$ rad/s^2 ↺

Bew. vgl. brugdek op moment $\theta = 30°$:

$B_r - mg \sin 30° = - m \cdot \frac{\ell}{4} \omega^2(\theta = 30°)$

$B_G + F - mg \cos 30° = m \frac{\ell}{4} \dot{\omega}(\theta = 30°)$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

rotatie vgl. van het bingdak op moment $\theta = 30°$

$$F \cdot l - \frac{l}{4} mg \cos 30° = I_B \cdot \dot{\omega}(\theta = 30°) \qquad (3)$$

$$\rightarrow F = 5447{,}85 \text{ N}$$

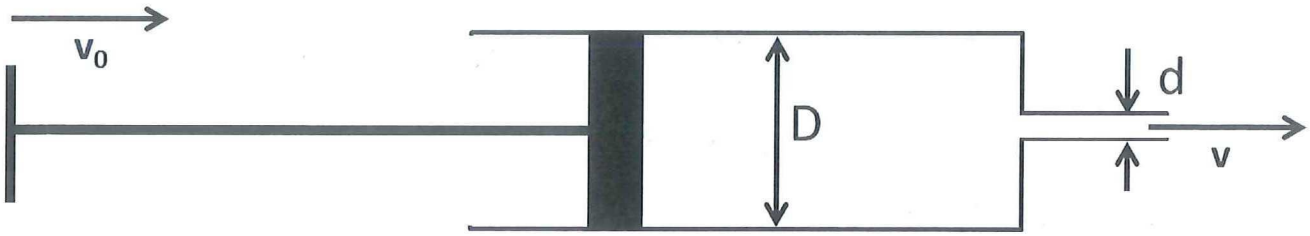
F in (1), (2) :

$$B_r = 8850{,}00 \text{ N}$$

$$B_\theta = 12743{,}56 \text{ N}$$

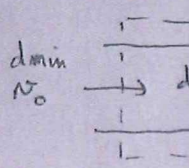
$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \underline{\underline{15{,}52 \text{ kN}}}$$

Opgave 4



3p **4a** Een cilindrische spuit (diameter D) met een cilindrisch uiteinde (diameter d) wordt geleegd met een constante snelheid v_0. Gebruikmakend van de wet van behoud van massa als startvergelijking, lijdt de snelheid waarmee het water uit de spuit stroomt af als functie van D, d en v_0. Geef alle aannames aan, die u hiervoor moet maken.

wet van behoud van massa door een stroombuis (geen energie verlies)



$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{in}}{dt} - \frac{dm_{uit}}{dt} \quad (0{,}5\text{ p})$$

water onsamendrukbaar: $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dm_{in}}{dt} = \frac{dm_{uit}}{dt}$

$m = \rho_w V$ (ρw constant) — 0,5 p

$Q = S \cdot v$ (m^3/s, m^2, m/s) — 0,5 p

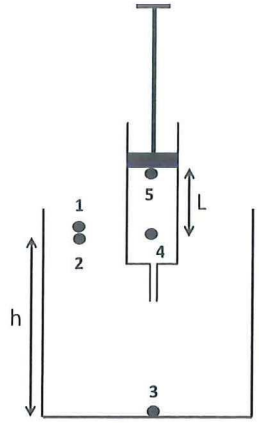
$\rho_w \frac{dV_{in}}{dt} = \rho_w \frac{dV_{uit}}{dt} \Rightarrow Q_{in} = Q_{uit}$ (0,5 p)

$\pi D^2 v_0 = \pi d^2 v_{uit}$

$$v_{uit} = v_0 \frac{D^2}{d^2} \quad (0{,}5\text{ p})$$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.



De spuit wordt nu in een bakje geplaatst zoals in de figuur is aangegeven. Het geldt $v_0 = 0$ m/s. De druk is overal hydrostatisch.

1p **4b** Bewijs, gebruikmakend van o.a. één van de wetten van Newton, dat de atmosferische druk in punt 1 (d.w.z. net boven het wateroppervlak), P_0, gelijk is aan de druk in punt 2 (net onder het wateroppervlak).

3de wet van Newton

lucht 1 → S(m²)

water 2

(0,5p) $\vec{F}_{l \to w} = -\vec{F}_{w \to l}$

$F_{l \to w} = F_{w \to l}$

(0,5p) $P_0 \cdot S = P_2 \cdot S \Rightarrow \boxed{P_2 = P_0}$

1p **4c** Bewijs dat $P_4 = P_0$.

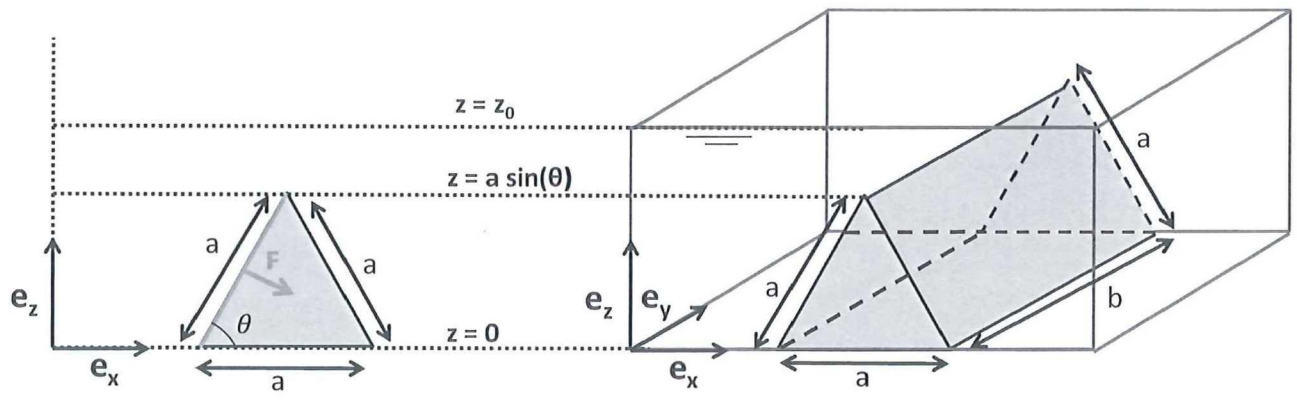
Als $P_4 \neq P_0$ zou er een overdruk optreden en zou het water niet stil staan.

1p **4d** Geef het drukverschil $P_5 - P_3$ aan als functie van P_0, ρ_w (dichtheid van het water), g (zwaartekrachtversnelling), en de relevante afmetingen (zie figuur).

$P_5 = P_0 - \rho_w g L$ (0,5 p) $\quad P_3 = P_0 + \rho_w g h$ (0,5 p) $\Rightarrow \boxed{P_5 - P_3 = -\rho_w g (L+h)}$

Opgave 5

We beschouwen een rechthoekig bak met breedte b en hoogte z_0. In deze bak zit een prisma, waarvan het grondoppervlak gelijk is aan een gelijkzijdig driehoek met zijlengte a. De lengte van het prisma is b en het prisma wordt zodanig in de bak geplaatst dat zijn lengte evenwijdig is met de breedte van de bak (zie figuur). De bak is volledig gevuld met water. ρ_w is de dichtheid van het water en g is de zwaartekrachtversnelling. Het oppervlak van het gelijkzijdig driehoek is $S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Neem aan dat het water niet stroomt (d.w.z, stil staat).

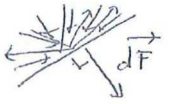


1p **5a** Geef (zonder her te leiden) de uitdrukking aan voor de x-component en de z-component van de kracht van Archimedes op het prisma als functie van a, b, ρ_w en g.

$$\vec{F_A} = \rho_w g S b \vec{e_z} = \rho_w g \frac{a^2\sqrt{3}}{4} b \vec{e_z}$$

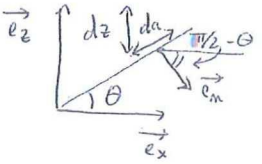
1p **5b** Wat is de oorsprong van de kracht F, die uitgeoefend wordt op de rode wand (afmeting $a \times b$) van het prisma (zie figuur)? Verklaar waarom F loodrecht staat op deze wand.

Op een punt wordt een 'alzijdige' (isotrope) druk uitgeoefend omdat de water moleculen van alle kanten tegen dit punt botsen en het gemiddelde van deze botsingen leveren een totale kracht die loodrecht op de wand staat (1p)



3p **5c** Herleidt de formule voor de x-component en de z-component van de drukkracht, die op de rode wand wordt uitgeoefend, als functie van $P_0 = P(z = z_0)$, a, b, ρ_w, g en θ.

(c) (3p)



$\vec{e}_m = \sin\theta\, \vec{e}_x - \cos\theta\, \vec{e}_z$

$dz = da \cdot \sin\theta \quad (z = a \cdot \sin\theta)$

$d\vec{F}(z) = P(z) \cdot b \cdot da \cdot \vec{e}_m$

(1p) $P(z) = P_0 + \rho_w g (z_0 - z)$ $\leftarrow$ $P(z) = \underbrace{P_0 + \rho_w g (z_0 - a\sin\theta)}_{= P^* = P(z = a\sin\theta)} + \rho_w g (a\sin\theta - z)$

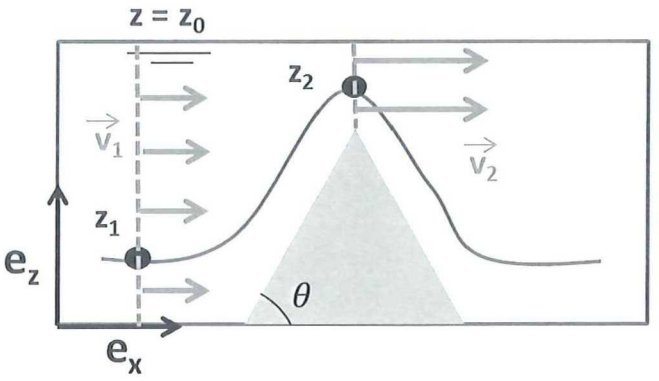
(1p) $\vec{F} = \int_0^{a\sin\theta} [P^* + \rho_w g (a\sin\theta - z)]\, b\, \frac{dz}{\sin\theta}\, \vec{e}_m$

$= P^* b a + \frac{\rho_w g b}{\sin\theta} \left[(a\sin\theta)^2 - \frac{(a\sin\theta)^2}{2} \right] \vec{e}_m$

(1p) $\vec{F} = ba \left[P_0 + \rho_w g z_0 - \frac{\rho_w g}{2} a\sin\theta \right] (\sin\theta\, \vec{e}_x - \cos\theta\, \vec{e}_z)$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.



Stel nu dat het water in de stroombuis stroomt. We beschouwen de aangegeven stroomlijn tussen profiel z_1 en profiel z_2. De snelheid en druk van het water op punt z_1 is v_1 en p_1, respectievelijk. De snelheid en druk van het water op punt z_2 is v_2 en p_2, respectievelijk. Neem aan dat v_1 en v_2 constant zijn in elk punt van de rode doorsneden (zie figuur).

2p **5d** Herleidt de formule voor het drukverschil $P_2 - P_1$ als functie van z_0, z_1, z_2, v_1, ρ_w, en g.

Bernoulli : $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho_w (v_1^2 - v_2^2) + \rho_w g (z_1 - z_2)$ (1p)

wet behoud massa : $\underbrace{b\, z_0}_{= S_1}\, v_1 = \underbrace{b\,(z_0 - a\sin\theta)}_{= S_2}\, v_2$ (1p)

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho_w v_1^2 \left[1 - \left(\frac{z_0}{z_0 - a\sin\theta}\right)^2\right] + \rho_w g (z_1 - z_2)$$

This answerbox continues on the next page.

This answerbox belongs to the question on the previous page.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

TENTAMEN

CTB1210 DYNAMICA en MODELVORMING

d.d. 13 april 2016 van 9:00 - 12:00 uur

1. Vul op het voorblad van het antwoordformulier uw naam, voorletters en studiennummer in.

2. Het tentamen bestaat uit 12 vraagstukken. Lees iedere vraag goed alvorens te antwoorden.

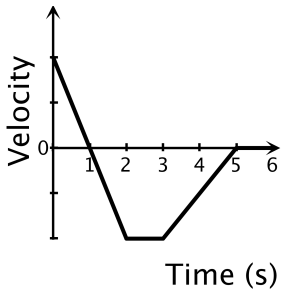
3. Alleen toegestaan is een (grafische) rekenmachine en één van de twee formulebladen op BB.

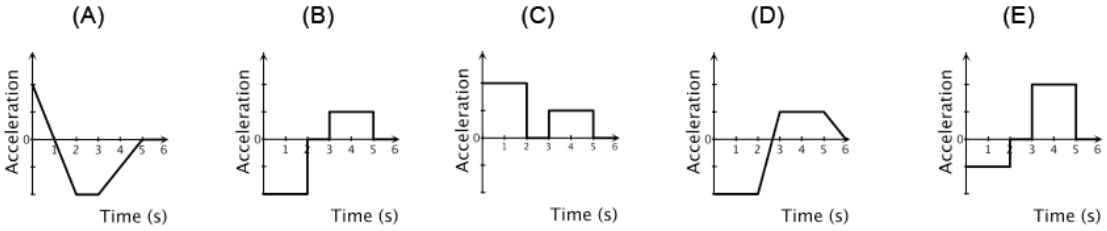
4. Het antwoord van elk vraagstuk dient in het bijbehorende kader te worden ingevuld. Aantekeningen buiten het kader tellen niet mee bij de beoordeling van het werk.

5. Tip: begin met vragen waar u snel de oplossing van kunt vinden.

6. Veel succes !

Opgave 1 [2 punten] Het figuur aan de rechterzijde beschrijft de snelheid-versus-tijd-grafiek van de beweging van een object gedurende een tijdsinterval van 6 s. Welke van de 5 grafieken (A t/m E) van versnelling versus tijd representeert het best de beweging van het object over hetzelfde interval?

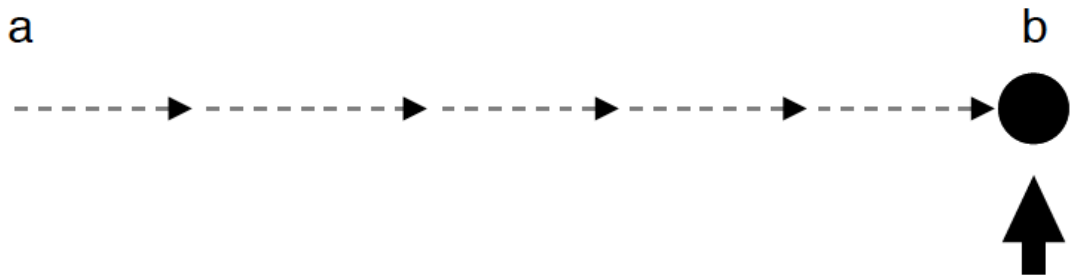




Opgave 2 [2 punten] Op een gegeven moment versnelt een object naar rechts. Wat kunt u zeggen over de beweging van het object (slechts één antwoord is juist):

a) het object beweegt naar rechts en zijn snelheid neemt toe.
b) het object beweegt naar rechts en zijn snelheid neemt af.
c) het object beweegt naar links.
d) zowel a) en b) zijn mogelijk.
e) zowel a) en c) zijn mogelijk.
f) a), b) en c) zijn mogelijk.

Opgave 3 Een puck beweegt met constante snelheid v_0 rechtlijnig van punt a naar punt b over een wrijvingsloze ondergrond. Luchtweerstandskrachten kunnen worden verwaarloosd. Op het moment dat de puck punt b bereikt ervaart hij een horizontale stoot (krachtstoot) in de richting van de pijl (zie figuur; kijkrichting is naar beneden gericht). Indien de puck dezelfde stoot had gekregen, maar lag hij vóór deze stoot stil in punt b, dan zou hij door deze stoot een snelheid v_k in de stootrichting krijgen.



3a [2 punten] De absolute snelheid van de puck net na de stoot is (slechts één antwoord is juist)

a) gelijk aan de snelheid v_0.
b) gelijk aan de snelheid v_k.
c) gelijk aan $v_0 + v_k$.
d) kleiner dan zowel v_0 en v_k.
e) groter dan zowel v_0 en v_k en kleiner dan v_0+v_k.
f) geen van de eerder genoemde antwoorden is correct.

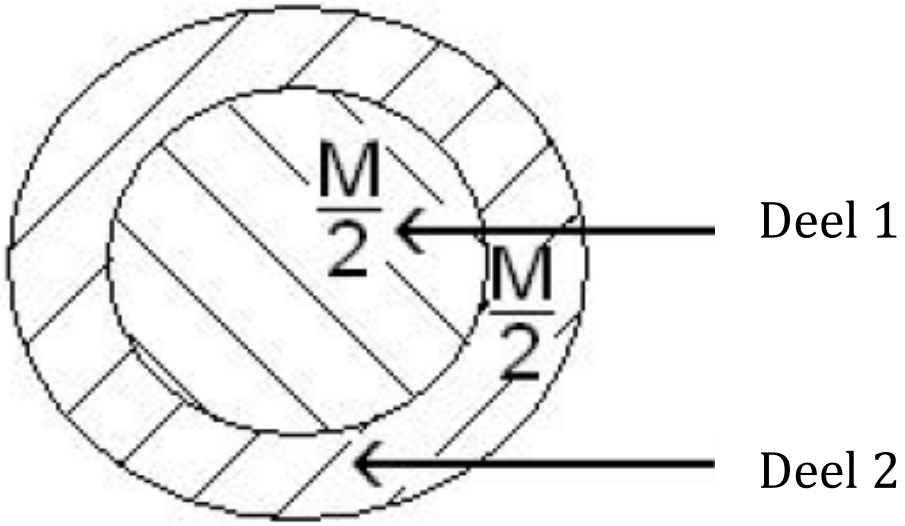
3b [2 punten] De belangrijkste kracht(en) die na de stoot op de puck werkt (werken) is (zijn) (slechts één antwoord is juist)

a) de zwaartekracht.
b) de zwaartekracht en een horizontale kracht in de richting van de beweging.
c) de zwaartekracht, een omhoog gerichte reactiekracht van het oppervlak, en een horizontale kracht in de richting van de beweging.
d) de zwaartekracht en een omhoog gerichte reactiekracht van het oppervlak.
e) geen krachten werken op de puck.

Opgave 4 [2 punten] Op een horizontaal oppervlak rolt een bol zonder slip en glijdt een kubus zonder te roteren. Beide objecten hebben dezelfde massa m. Op een gegeven moment bewegen de massamiddelpunten van beide objecten met dezelfde snelheid v relatief t.o.v. het oppervlak. Welke van de volgende uitspraken is op dat moment waar (slechts één antwoord is juist)?

a) De kubus en de bol hebben dezelfde kinetische energie.
b) De kubus heeft een kleinere kinetische energie dan de bol.
c) De arbeid die moet worden verricht om de kubus te stoppen is groter dan de arbeid die moet worden verricht om de bol te stoppen.
d) Welke van beide objecten een grotere kinetische energie heeft hangt af van de numerieke waarde van m.
e) Geen van de antwoorden a)-d) is correct.

Opgave 5 [2 punten]
We beschouwen een homogene schijf heeft massa M (zie figuur). Welke uitspraak over het traagheidsmoment I om een as door zijn massamiddelpunt loodrecht op het papieren vlak, is waar (slechts één uitspraak is juist)?



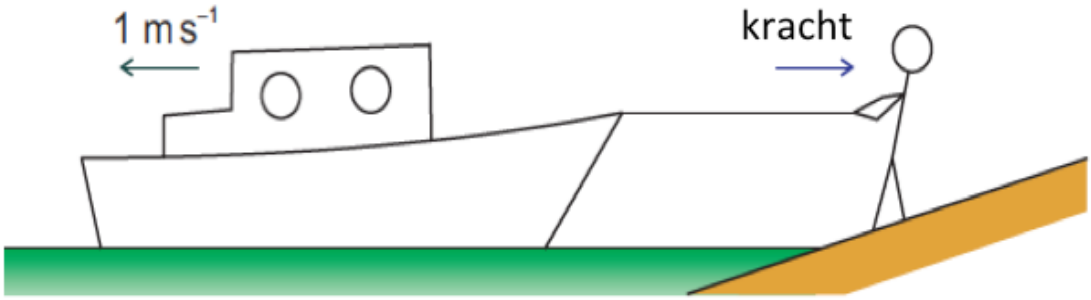
a) Deel 1 en deel 2 van de schijf, elk met een massa M/2 (zie figuur) dragen even bij aan I.
b) Deel 1 draagt meer bij aan I dan deel 2.
c) Deel 1 draagt minder bij aan I dan deel 2.
d) Afhankelijk van de numerieke waarde van M draagt deel 1 meer of minder bij aan I dan deel 2.
e) Geen van de antwoorden a)-d) is correct.

Opgave 6 [2 punten] Wanneer een constant moment, ongelijk aan 0, op een star lichaam werkt, veroorzaakt dit (meer dan één antwoord kan juist zijn):

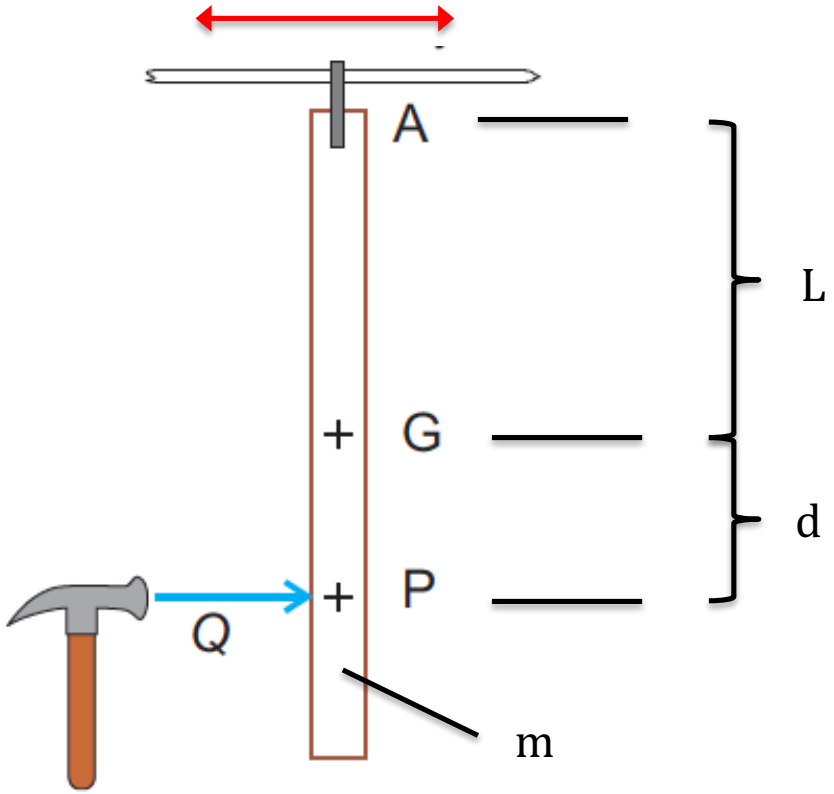
a) geen verandering in de rotatie van het lichaam.
b) een constante hoeksnelheid.
c) een constante hoekversnelling.
d) een verandering in de hoekversnelling.
e) een verandering in de hoeksnelheid.

Opgave 7 Een boot (massa m_b = 1500 kg) wordt gelanceerd vanaf een trolley op een helling. De trolley beweegt met een snelheid van 1 m/s. Op een gegeven moment stopt de trolley en de boot drijft op het water met dezelfde beginsnelheid. Op dat moment trekt een bemanningslid (massa m = 70 kg) aan een touw dat aan de boot is vastgemaakt met een kracht gelijk aan 30% van zijn eigen gewichtskracht. Zwaartekrachtversnelling g = 9.81 m/s^2.

7a [4 punten] Hoe lang duurt het totdat de boot stilstaat (getal afgerond op twee decimalen nauwkeurig en eenheid)?
7b [3 punten] Wat is de lengte van het touw op het moment dat de boot tot stilstand komt (getal afgerond op twee decimalen nauwkeurig en eenheid). U mag hiervoor geen arbeid-energie relatie gebruiken.
7c [5 punten] Bereken de lengte van het touw op het moment dat de boot tot stilstand komt met behulp van de arbeid-energie relatie (getal afgerond op twee decimalen nauwkeurig en eenheid).



Opgave 8 We beschouwen een staaf (massa m, lengte 2L, traagheidsmoment I_G = 1/3 mL^2), die aan een horizontale kabel hangt en langs deze kabel zonder wrijving kan bewegen. De staaf krijgt een stoot Q met een hamer op punt P op afstand d van het massamiddelpunt G van de staaf (zie figuur). Zwaartekrachtversnelling g = 9.81 m/s^2.



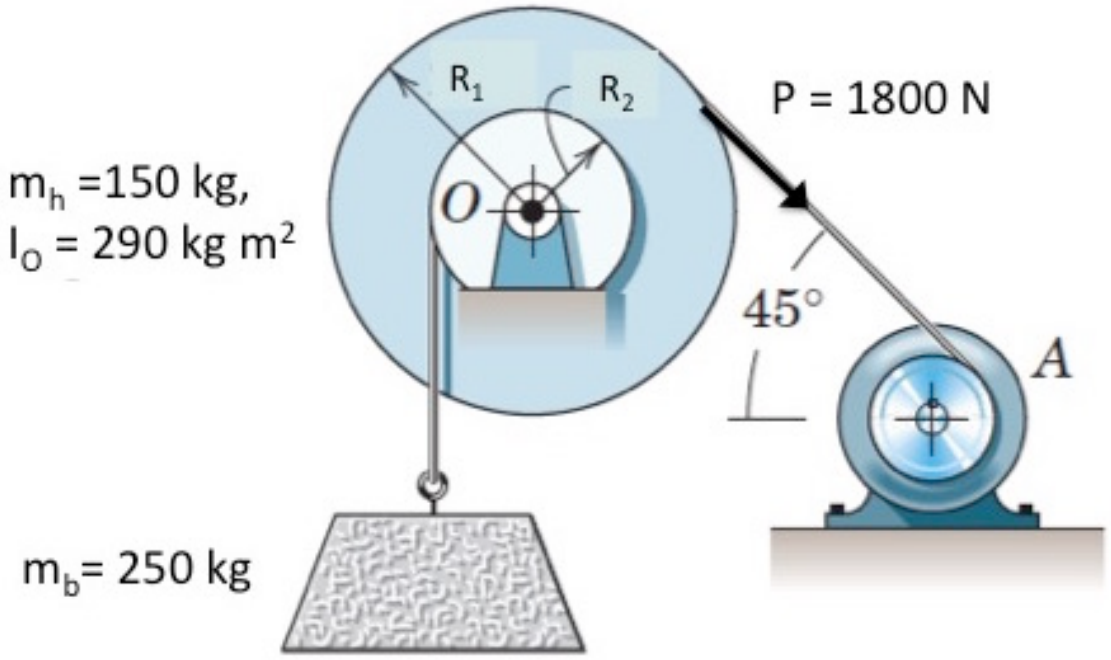
Stel Q, m, L en d zijn gegeven. Leid de formule af voor :

8a [3 punten] De snelheid van het massamiddelpunt G van de staaf.
8b [5 punten] De hoeksnelheid van de staaf.
8c [3 punten] De snelheid waarmee de staaf langs de kabel glijdt.

De formules mogen alleen bekende grootheden (d.w.z., Q, m, L, d en g) bevatten.

8d [3 punten] Voor gegeven Q, m en L is er een afstand d_0 tussen P en G waarvoor de staaf niet over de kabel glijdt. Leid een formule af voor deze afstand d_0 . De formule mag alleen bekende grootheden (d.w.z. Q, m, L) bevatten.

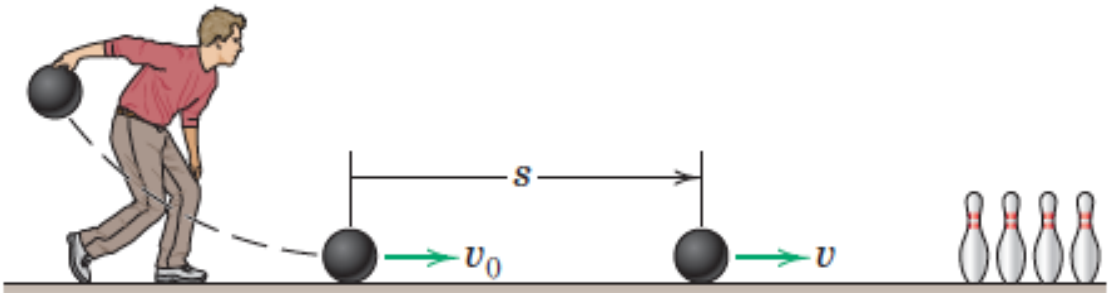
Opgave 9 Een betonnen blok met massa m_b = 250 kg wordt door een hefmechanisme omhoog getild. Het hefmechanisme bestaat uit een aandrijfeenheid A en twee katrollen. De twee katrollen zijn vast met elkaar verbonden en roteren samen als één stelsel met massa m_h = 150 kg, massamiddelpunt O en traagheidsmoment I_O = 290 kg.m^2. De aandrijfeenheid levert een constante trekkracht van P = 1800 N. Afmetingen: R_1 = 0.6 m, R_2 = 0.3 m. Alle kabels zitten strak en er is geen slip. Zwaartekrachtversnelling g = 9.81 m/s^2.



9a [4 punten] Teken het vrije-lichaamsschema (free body diagram) voor i) het stelsel van twee katrollen en ii) het blok.
9b [7 punten] Bereken de verticale versnelling van het blok (getal afgerond of twee decimalen nauwkeurig en eenheid).
9c [6 punten] Bereken de kracht in O (getal afgerond of twee decimalen nauwkeurig en eenheid).

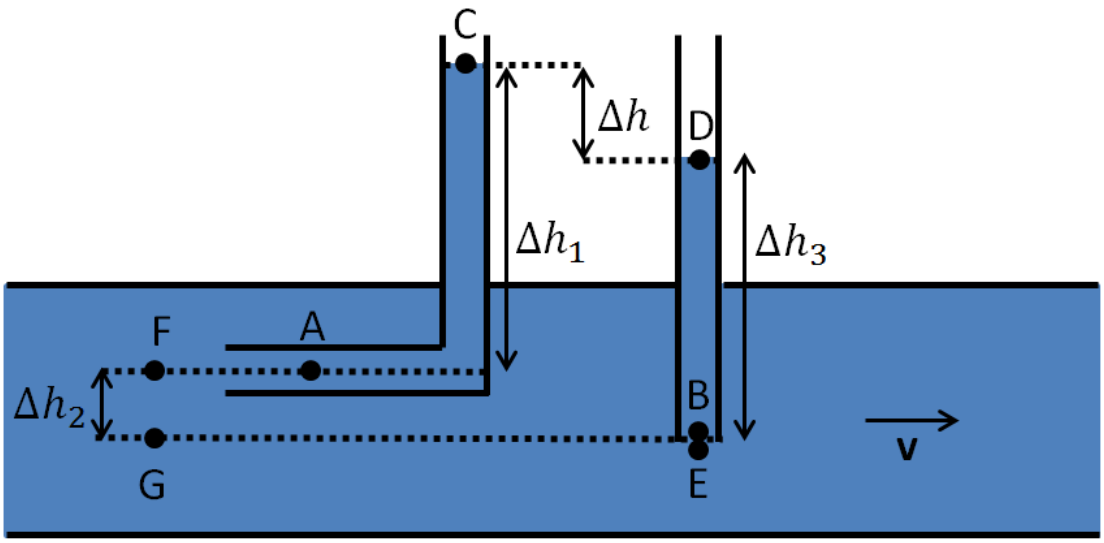
Opgave 10 Een bowlingbal heeft een omtrek van 68 cm, een massa van 5 kg en een traagheidsmoment om zijn massamiddelpunt van $I_G = 0.03$ kg.m^2. De bowlingbal heeft een snelheid van $v_0 = 6$ m/s op het moment dat deze de vloer raakt; de rotatiesnelheid is op dat moment nul. Zwaartekrachtversnelling $g = 9.81$ m/s^2.

10a [6 punten] Bereken de afstand, die de bowlingbal aflegt tot het moment dat deze zuiver begint te rollen (getal afgerond of twee decimalen nauwkeurig en eenheid). De wrijvingscoëfficiënt tussen bal en vloer is $\mu = 0.2$.
10b [4 punten] Hoeveel procent van de kinetische energie die de bowlingbal aan het begin heeft, is deze kwijt op het moment dat deze begint zuiver te rollen (getal afgerond of één decimaal nauwkeurig en eenheid)?



$\omega=0$

Opgave 11 We beschouwen een ideale vloeistof die door een buis stroomt met een snelheid *v* (zie figuur).



11a [2 punten] Kan de wet van Bernoulli worden toegepast tussen C en D ? Verklaar je antwoord.

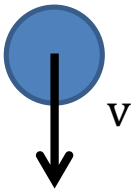
11b [6 punten] Geef de formule aan voor de aangegeven relaties tussen de drukken als functie van de dichtheid van de vloeistof ρ, de zwaartekrachtversnelling g, de snelheid van de vloeistof in de buis *v* en de hoogteverschillen Δh_i (zie figuur):

$$P_A - P_F = \cdots$$
$$P_A - P_C = \cdots$$
$$P_E - P_B = \cdots$$
$$P_G - P_F = \cdots$$
$$P_G - P_E = \cdots$$
$$P_B - P_D = \cdots$$

We nemen aan dat $P_D = P_C = P_0$ waarbij P_0 de atmosferische druk is.

11c [4 punten] Gegeven Δh = 20 cm, ρ = 1000 kg/m^3 en g = 9.81 m/s^2. Leid de formule af voor de snelheid *v* van de vloeistof in de buis. Bereken vervolgens de snelheid (getal afgerond op twee decimalen nauwkeurig en eenheid).

Opgave 12 Een rond deeltje heeft straal R = 0.5 cm, dichtheid ρ_p en snelheid *v*, het medium heeft dichtheid ρ en viscositeit η (lucht: ρ=1.2 kg/m^3, η=1.8x10^{-5} Pa.s; water: ρ= 1000 kg/m^3, η=10^{-3} Pa.s). Zwaartekrachtversnelling g=9.81 m/s^2.



12a [2 punten] Voor welk dichtheid ρ_p van het deeltje is zijn snelheid *v* in water gelijk aan nul (d.w.z. het deeltje bezinkt niet en drijft niet op) ?

Neem voor de opgaven 12b t/m 12e aan dat ρ_p = 2600 kg/m^3. Ga ervan uit dat voor de berekening van de viskeuze wrijvingskracht gebruik mag worden gemaakt van de wet van Stokes (F = 6πηRv).

12b [3 punten] Leid het rechterlid af van de tweede wet van Newton voor het deeltje als functie van ρ, ρ_p, η, R, v, m en g:

$$m\frac{dv}{dt} = \cdots$$

12c [4 punten] De terminale snelheid van een deeltje is de snelheid, die een deeltje heeft bereikt wanneer het geen versnelling meer ondervindt. Leid de formule af voor de terminale snelheid als functie van ρ, ρ_p, η, R, v, m en g. Bereken de terminale snelheid van een deeltje i) in water en ii) in lucht (getal afgerond op één decimaal nauwkeurig en eenheid).

12d [4 punten] Ga er nu van uit dat de weerstandskracht wordt beïnvloed door turbulentie en wordt gegeven door:

$$F = \pi R^2 \rho\, v^2/4$$

Leid de formule af van de terminale snelheid als functie van ρ, ρ_p, η, R, v, m en g. Bereken de terminale snelheid van een deeltje i) in water en ii) in lucht (getal afgerond op twee decimalen nauwkeurig en eenheid).

12e [2 punten] Bereken het Reynoldsgetal ($\Re = R\rho v/\eta$) in water voor twee gevallen: i) de frictiekracht volgt de wet van Stokes; ii) de frictiekracht wordt beïnvloed door turbulentie (getal en eenheid). Welke frictiekracht is het meest realistisch? Verklaar je antwoord.

Opgave 1

antwoord B

Opgave 2

antwoord E

Opgave 3

3a antwoord E

3b antwoord D

Opgave 4

Kin. energie kubus: $T_e = \frac{1}{2} m \cdot v_G^2$

Kin energie bol: $T_b = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

dus $T_b > T_e$ => antwoord B

Opgave 5

het traagheidsmoment van een deeltje dm gelegen evenwijdig met het kwadraat van zijn afstand t.o.v. de rotatieas. => deel 2 draagt meer bij aan het traagheidsmoment dan deel 1.

antwoord C

Opgave 6

$$\Sigma M_G = M_G = I_G \alpha$$

M_G = constant → α = constant → ω is een lineaire functie van de tijd.

→ antwoord C, E

Opgave 7

$F = 0{,}3\,mg$; 2e wet Newton: $\underline{F} = m_b \cdot \underline{\ddot{s}}$

oftwel

$$-0{,}3mg = m_b \cdot \ddot{s} \Rightarrow \boxed{\ddot{s} = -0{,}3g \cdot \frac{m}{m_b}}$$

$\ddot{s}$ is constant ; $\ddot{s} = a$ = constant.

$\Rightarrow \dot{s} = a \cdot t + C$, $\dot{s}(t=0) = v_0 = 1$ m/s $\Rightarrow$

$\dot{s} = a \cdot t + 1$ oftwel $\boxed{\dot{s} = -0{,}3g \frac{m}{m_b} \cdot t + 1}$

$\dot{s}(t=\tau) = 0 : -0{,}3g \frac{m}{m_b} \cdot \tau + 1 = 0$

$\tau = -\frac{1}{a}$ oftwel $\boxed{\tau = \frac{m_b}{0{,}3g \cdot m} = 7{,}28\,s}$

antwoord 7a

$s = +\frac{1}{2}a \cdot t^2 + t + C$; $s(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$s = t \cdot \left(\frac{1}{2}at + 1\right)$

$s(t=\tau) = -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2a} = \boxed{\frac{m_b}{0{,}6g \cdot m} = 3{,}64\,m}$

antwoord 7b

arbeid - energie

tegen F wordt arbeid verricht. Bewegingsrichting is tegengesteld F => arbeid is negatief.
F constant =>

$$\boxed{\mathcal{A}_{12} = -F \cdot s(t=\tau)}$$

Kin energie bij het begin: $E_1 = \frac{1}{2} m_b \cdot v_0^2$

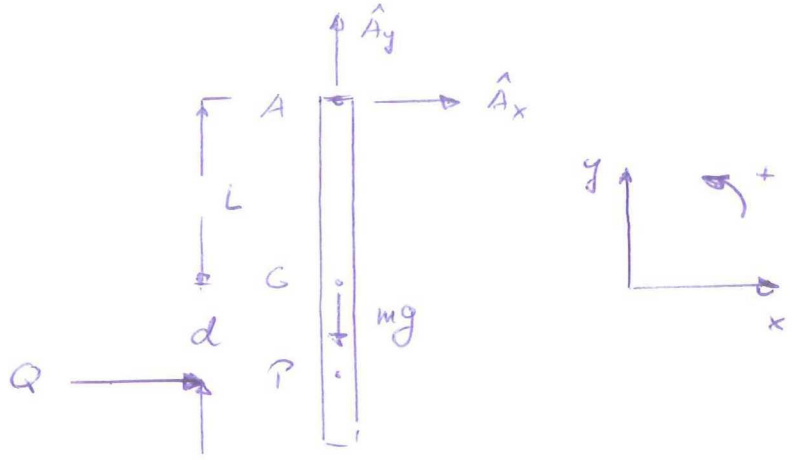
Kin energie bij het einde: $E_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad -F \cdot s(t=\tau) = -\tfrac{1}{2} m_b v_0^2$$

$$\boxed{s(t=\tau) = \frac{m_b v_0^2}{2F} = 3{,}64 \text{ m}}$$

afstand vraag 7c

Opgave 8



$$Q = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = m \cdot v_G(t_2) - m \cdot v_G(t_1)$$

stof aan het begin in rust : $v_G(t_1) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{v_G(t_2) = \frac{Q}{m}}$$ antwoord 8a

Stootmoment - impulsmoment verzelfking (impulsief); referentiepunt A (want over het interval $[t_1, t_2]$ mag worden verondersteld dat A niet beweegt) :

$$\hat{M}_A = I_A \cdot \omega$$

$$Q \cdot (L+d) = \left(\frac{1}{12} m (2L)^2 + mL^2\right) \cdot \omega = \frac{4}{3} mL^2 \omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{Q(L+d)}{\frac{4}{3} mL^2}}$$ antwoord 8b

Methode van de relatieve snelheid :

$$\underline{v}_A = \underline{v}_G + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/G}$$

$$v_A \cdot \underline{e}_x = v_G \underline{e}_x + \omega \underline{e}_z \times L \underline{e}_y$$

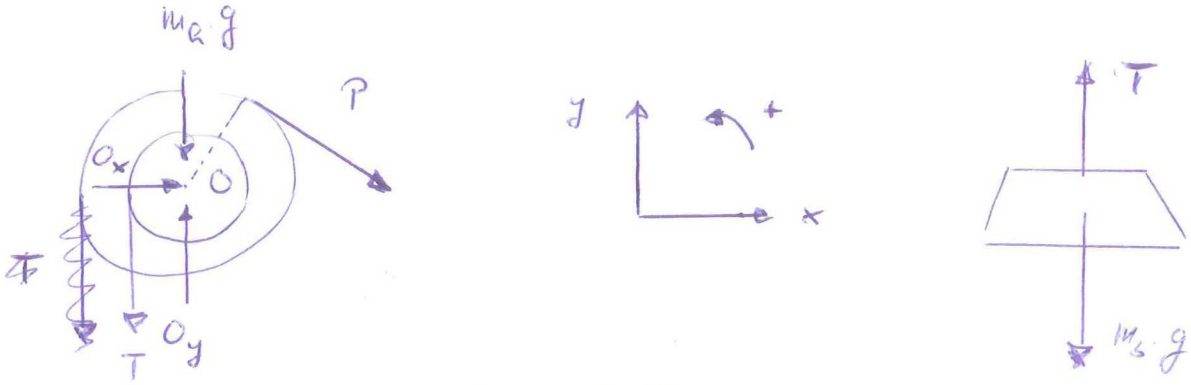
$$= v_G \underline{e}_x - L\omega \underline{e}_x$$

antwoord 8c $\quad \boxed{v_A = v_G - L\omega = v_G - \frac{Q(L+d)}{\frac{4}{3} mL} = \frac{Q}{m}\left[1 - \frac{L+d}{\frac{4}{3} L}\right]}$

$V_A = 0 \iff 1 - \frac{L+d}{\frac{4}{3}L} = 0 \iff \boxed{d = \frac{L}{3}}$

Autocad 8d

Opgave 9



antwoord 9a

2e bewegingsvergelijking voor stelsel van 2 katrollen:

$$\boxed{\Sigma M_0 = I_0 \cdot \alpha} \quad ; \quad \Sigma M_0 = R_2 \cdot T - R_1 \cdot P \qquad (1)$$

$$I_0 = 250 \text{ kg.m}^2$$

1e bewegingsvergelijking blok:

$$\Sigma F_y = m_b \cdot \ddot{y} \quad : \quad \boxed{T - m_b g = m_b \ddot{y}} \qquad (2)$$

Lineaire randconditie:

$$-R_2 \cdot \alpha = \ddot{y} \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\ddot{y}}{R_2}} \qquad (3)$$

d.i. (1) - (3) volgt met een:

$$R_2 T - R_1 \cdot P = -I_0 \cdot \frac{\ddot{y}}{R_2} \quad , \quad T = m_b (g + \ddot{y})$$

$$R_2 m_b (g + \ddot{y}) - R_1 \cdot P = -\frac{I_0}{R_2} \cdot \ddot{y}$$

$$\ddot{y} \left[R_2 m_b + \frac{I_0}{R_2} \right] = R_1 \cdot P - R_2 m_b g$$

antwoord 9b

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{R_1 \cdot P - R_2 m_b g}{R_2 m_b + \frac{I_0}{R_2}} = \frac{0{,}33}{1} \text{ m/s}^2}$$

1e Bewegingsvgl. voor de Katrollen:

$$\sum F_x = O_x + P \cdot \cos\beta = 0$$

$$\sum F_y = -T + O_y - P \cdot \sin\beta = 0$$

T volgt uit SS: $T = m_6 \cdot (g + \ddot{y}) = 2535{,}1$ ~~2732,1~~ N

$$\Rightarrow \quad O_x = -P \cos\beta = -1272{,}8 \text{ N}$$

$$O_y = T + P \cdot \sin\beta = 3807{,}9 \text{ N}$$

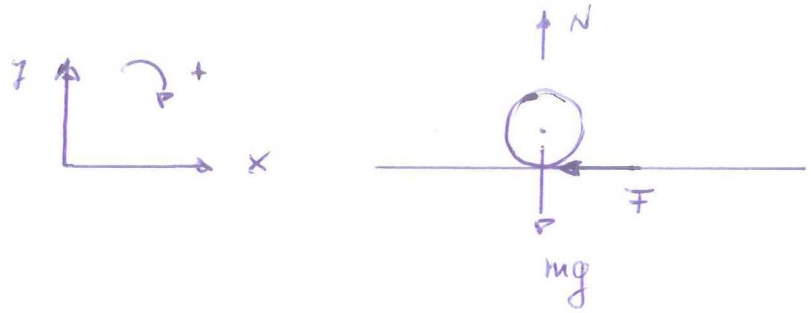
~~4001,5~~

$$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 4015{,}0 \text{ N}$$

~~4202,3~~

antwoord 9c

Opgave 10



Bewegingsvergelijkingen bolling bol:

$$\Sigma F_x = m\cdot\ddot{x} \;;\; -F = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \;;\; N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad (2)$$

$$\Sigma M_G = I_G\cdot\alpha \;;\; F\cdot r = I_G\alpha \quad (3)$$

Rollen met slip:

$$F = \mu\cdot N = \mu mg \quad (4)$$

(4) in (3):

$$\mu mg r = I_G\cdot\alpha$$

$$\alpha = \frac{\mu mg r}{I_G} =: \alpha_0 = \text{constant}$$

$$\alpha_0 = 35{,}35 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega(t) = \alpha_0\cdot t + C \;;\; \omega(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{\omega(t) = \alpha_0\cdot t}$$

(4) in (1):

$$-\mu mg = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\mu g$$

$$\dot{x}(t) = -\mu g t + C \;;\; \dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow C = v_0$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\mu g t + v_0}$$

Op het moment $t=\tau$ van zuiver rollen geldt:

$$\dot{x}(\tau) = \omega(\tau)\cdot r \quad \text{of wel}$$

$$-\mu g\tau + v_0 = \alpha_0\cdot\tau\cdot r \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{v_0}{\alpha_0 r + \mu\cdot g} = 1{,}04\,s}$$

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 \cdot t + C; \quad x(t=0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 \cdot t$$

$$\boxed{x(\tau) = -\tfrac{1}{2}\mu g \tau^2 + v_0 \cdot \tau = 5{,}16 \text{ m}}$$

Kinetische Energie zu Beginn $t=0$:

$$T_0 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 = 9900 \text{ N}$$

Kinetische Energie zu Zeitpunkt $t=\tau$:

$$T_\tau = \tfrac{1}{2} m \dot{x}(\tau)^2 + \tfrac{1}{2} I_G \cdot \omega(\tau)^2$$

$$\dot{x}(\tau) = -\mu g \tau + v_0 = 3{,}97 \text{ m/s}$$

$$\omega(\tau) = \alpha_0 \tau = 36{,}66 \text{ rad/s}$$

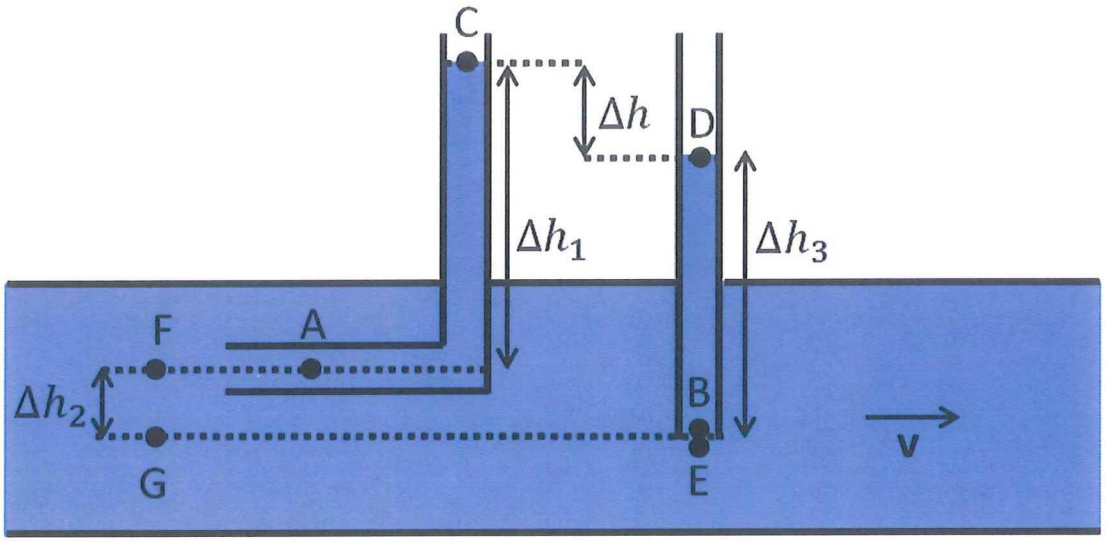
$$T_\tau = 39{,}35 + 20{,}16 = 59{,}51 \text{ N}$$

$$T_\tau [\%] = \frac{T_\tau}{T_0} \cdot 100 = 66{,}1\ \%$$

Energie verloren: $\boxed{T_0 - T_\tau = 33{,}9\ \%}$

Opgave 11

Opgave ~~1~~(20 min)



We beschouwen een ideale vloeistof die door een buis stroomt met snelheid v, zie plaatje.

a) Kan de wet van Bernoulli worden toegepast tussen C en D ? Verklaar je antwoord.

Antwoord: Nee, Bernoulli kan niet toegepast worden, want C en D liggen niet op dezelfde stroomlijn.

b) Geef de relatie tussen de volgende drukken, als functie van de dichtheid van de vloeistof ρ, de zwaartekrachtversnelling g, de snelheid van de vloeistof in de buis v en de hoogteverschillen Δh_i aangegeven in het plaatje:

$$P_A - P_F = \cdots$$

$$P_A - P_C = \cdots$$

$$P_E - P_B = \cdots$$

$$P_G - P_F = \cdots$$

$$P_G - P_E = \cdots$$

$$P_B - P_D = \cdots$$

We nemen aan dat $P_D = P_C = P_0$ waar P_0 de atmosferische druk is.

Antwoord:

$$P_A - P_F = 0.5\rho v^2$$

$$P_A - P_C = \rho g \Delta h_1$$

$$P_E - P_B = 0$$

$$P_G - P_F = \rho g \Delta h_2$$

$$P_G - P_E = 0$$

$$P_B - P_D = \rho g \Delta h_3$$

c) Gegeven Δh = 20 cm, de dichtheid van het vloeistof ρ = 1000 kg/m^{3}en g = 9.81 m/s^2, vind de snelheid v van de vloeistof in de buis. Geef eerst de uitdrukking van deze snelheid gebruikmakend van de symbolen, en daarna het getal met eenheid.

Antwoord: Gebruikmakend van de drukverschillen kan men vinden dat:

$$P_A - P_F = 0.5\rho v^2 = \rho g \Delta h_1 + \rho g \Delta h_2 - \rho g \Delta h_3$$

Verder:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 - \Delta h_3$$

Hieruit volgt dat:

$$v = \sqrt{2g\Delta h}$$

We vinden dat v = 1.98 m/s

opgave 12

~~Opgave 2 (25 min)~~

De straal van een rond deeltje is R = 0.5 cm. De dichtheid van lucht is ρ_l =1,2 kg/m^3, en die van water ρ_w =1000 kg/ m^3. De viscositeit van lucht bedraagt η_l =1,8× 10^{-5} Pa.s en die van water η_w =10^{-3} Pa.s.

a) Voor welk deeltjesdichtheid zou de snelheid van het deeltje nul zijn in water (het deeltje bezinkt niet en drijft niet op) ?

Antwoord: dit gebeurt wanneer het deeltje dezelfde dichtheid heeft als water [want dan is de kracht van Archimedes omgekeerd gelijk aan de zwaartekracht]

We nemen aan dat de dichtheid van het deeltje ρ_p =2600 kg/ m^3 is. Ga ervan uit dat voor de berekening van de viskeuze wrijvingskracht gebruik mag worden gemaakt van de wet van Stokes (F = 6πηRv) waar η de viscositeit is, R de straal van het deeltje en v zijn snelheid.

b) Geef de 2de wet van Newton voor het deeltje, uitsluitend uitgedrukt in de onderstaande symbolen (d.w.z. geen getallen gebruiken):

$$m\frac{dv}{dt} = \cdots$$

Gebruik als symbolen: ρ voor de dichtheid van het medium (water of lucht), ρ_p voor de dichtheid van het deeltje, η voor de viscositeit van het medium, R voor de straal van het deeltje, v voor zijn snelheid, m voor zijn massa en g voor de zwaartekrachtversnelling.

Antwoord:

$$m\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta Rv + mg - \frac{4}{3}\pi R^3\rho g$$

Men kan ook zeggen dat:

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_p$$

en vervolgens:

$$m\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta Rv + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_p - \rho)g$$

c) De terminale snelheid van een deeltje is de snelheid die een deeltje heeft bereikt wanneer het geen versnelling meer ondervind. Geef de algemene uitdrukking voor deze snelheid (met de gegeven symbolen). Pas de formule toe voor het geval dat het deeltje zich in water bevindt en daarna voor het geval dat het zich in lucht bevindt.

Antwoord: geen versnelling betekent dat

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

en dus:

$$v = \frac{m}{6\pi\eta R} g - \frac{2}{9\eta} R^2 \rho g$$

ofwel:

$$v = \frac{2}{9\eta} R^2 (\rho_p - \rho) g$$

in water: v = 87.2 m/s; in lucht: v = 7800 m/s

d) Ga er nu van uit dat de weerstandskracht wordt beïnvloed door turbulentie en wordt gegeven door:

$$F = \pi R^2 \rho v^2 / 4$$

Geef de uitdrukking voor de terminale snelheid met de gegeven symbolen. Geef daarna de numerieke waarden (getallen) voor de terminale snelheid in water en in lucht.

Antwoord: gebruikmakend van de wet van Newton,

$$0 = -\pi R^2 \rho v^2 / 4 + \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_p - \rho) g$$

Hieruit volgt dat:

$$v = 4 \sqrt{\frac{1}{3} R \frac{(\rho_p - \rho)}{\rho} g}$$

in water: v = 0.64 m/s (= 64 cm/s); in lucht: v =23.80 m/s

e) Bereken het Reynoldsgetal ($Re = R\rho v/\eta$) in water voor het geval dat de frictiekracht de wet van Stokes volgt, en daarna voor het geval dat de frictiekracht wordt beïnvloed door turbulentie. Welke frictiekracht is het meest realistisch? Verklaar je antwoord.

Antwoord:

Re(Stokes) = 436000 en Re(turbulent) = 1600 .

Men kan verklaren dat de door turbulentie beïnvloede frictiekracht het meest realistische is:

In het geval van Stokes is het Reynoldsgetal veel groter dan 1, dus is het regime turbulent terwijl we hebben aangenomen dat dat niet zo was: dit levert een contradictie op, en we kunnen dus concluderen dat de viskeuze kracht wordt beïnvloed door turbulentie.

Verder is een valsnelheid van 87 m/s niet realistisch (dat is meer dan 300km/u!).

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

TENTAMEN

CTB1210 DYNAMICA en MODELVORMING

d.d. 28 januari 2016 van 9:00 - 12:00 uur

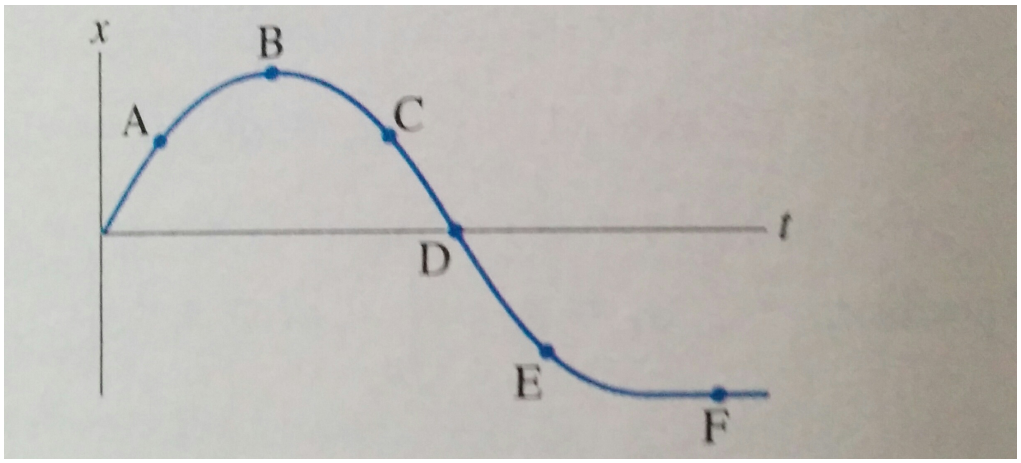
Let op:

- Voor uw antwoorden op de vragen van DEEL 1 (conceptuele vragen) gebruikt u het invulformulier.
- Voor DEEL 2 geeft u alleen het eindresultaat (getal en eenheid) aan; GEEN UITWERKINGEN. Gebruik hiervoor slechts 1 vel tentamenpapier.
- Voor elke opgave van DEEL 3 gebruikt u een NIEUW vel tentamenpapier. U wordt verwacht per opgave de hele uitwerking inclusieve eindresultaat (getal en eenheid) in te dienen.
- Vergeet niet uw naam, studienummer en het tentamendeel (deel 2 of deel 3) op ALLE door u ingeleverde vellen te vermelden.
- Het gewicht van de onderdelen is in de kantlijn aangegeven.
- U mag dit tentamen meenemen
- Het gebruik van een standaard (grafische) rekenmachine en van het formuleblad uit het boek van Hibbeler is toegestaan.
- Ontbrekende formules staan in de bijlage.

Deel 1: Conceptuele vragen (gebruik het invulformulier)

Opgave 1 [1 punt]. Een voorwerp beweegt rechtlijnig in richting x (positief naar rechts). In onderstaand figuur ziet u het plaats-tijd schema. In welke punt c.q. punten

a. beweegt het voorwerp het langzaamst?
b. beweegt het voorwerp naar links?
c. verandert het voorwerp zijn richting?



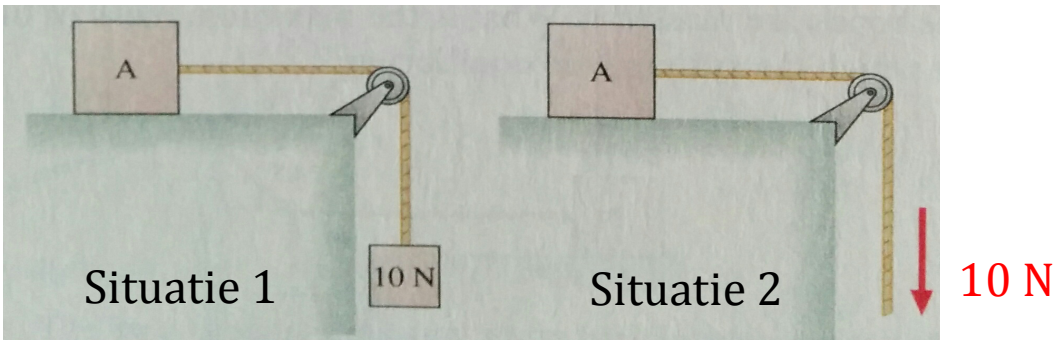
Opgave 2 [1 punt]. Stel u drukt een boek tegen de muur hard genoeg zodat het niet beweegt. Wijst de wrijvingskracht op het boek

a. in richting van de muur?
b. in richting van u?
c. omhoog?
d. omlaag?
e. of is er geen wrijvingskracht?

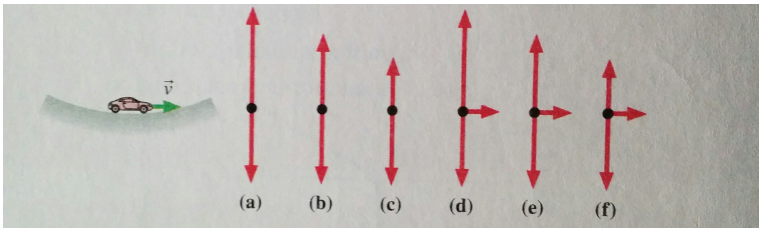
Opgave 3 [1 punt]. In situatie 1 beweegt blok A als gevolg van een gewicht van 10 N. In situatie 2 beweegt blok A als gevolg van een constante trekkracht van 10 N. De massa van de kabel en van de pulley en alle wrijvingskrachten kunnen worden verwaarloosd. De versnelling van blok A in situatie 2 is

a. groter
b. kleiner
c. gelijk

aan de versnelling van blok A in situatie 1.



Opgave 4 [1 punt]. Een auto rijdt zonder brandstof een berg omlaag, door een dal en aan de andere kant weer omhoog. U ziet 6 vrijlichaamschema's. Welk vrijlichaamschema is correct op het laagste punt van de baan? Lucht- en rolweerstandskrachten zijn verwaarloosbaar.

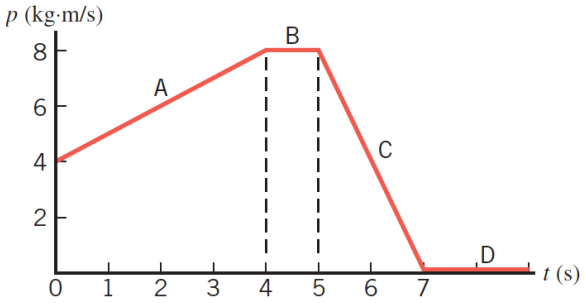


Opgave 5 [1 punt]. Twee puntmassa's (massa m_A en massa m_B) botsen tegen elkaar; de ene was voor de botsing in beweging, de andere in rust.

a. Is het mogelijk dat beide puntmassa's vlak na de botsing in rust zijn? Geef een voorbeeld waar dit kan gebeuren of verklaar waarom dit niet kan gebeuren.

b. Is het mogelijk dat één van de puntmassa's vlak na de botsing in rust is? Geef een voorbeeld waar dit kan gebeuren of verklaar waarom dit niet kan gebeuren.

Opgave 6 [1 punt]. Een puntmassa beweegt langs de positieve x-as en onderstaand figuur toont de impuls p als functie van de tijd t. Een kracht (die ook nagenoeg nul kan zijn) werkt tijdens de beweging op de puntmassa. Welke van de volgende antwoorden ik correct ?



a. de absolute waarde van de kracht is het grootst in B, het kleinst in D
b. de absolute waarde van de kracht is het grootst in C, het kleinst in B
c. de absolute waarde van de kracht is het grootst in A, het kleinst in D
d. de absolute waarde van de kracht is het grootst in C, het kleinst in A
e. de absolute waarde van de kracht is het grootst in A, het kleinst in C

Opgave 7 [1 punt]. Een bowlingbal rolt zonder slip met constante snelheid. Welke percentage van zijn totale kinetische energie is translatieenergie?

a. 50%
b. 71%
c. 46%
d. 29%
e. 33%

Opgave 8 [1 punt]. Een man zit op een stoel, die met constante hoeksnelheid roteert (verwaarloos wrijving). Op een gegeven moment laat de man de twee halters vallen. Welke van de 4 antwoorden is correct?

rotatieas

a. De hoeksnelheid verandert niet.
b. De hoeksnelheid neemt af, maar de man blijft wel roteren.
c. De hoeksnelheid neemt heel snel af naar 0 rad/s.
d. De hoeksnelheid neemt toe.

Opgave 9 [2 punten]. Een puntmassa beweegt langs een willekeurige baan. Op de puntmassa werkt een kracht ***F***. De arbeid, die tegen ***F*** wordt verricht wanneer de puntmassa van positie $\boldsymbol{r}_1$ naar positie $\boldsymbol{r}_2$ beweegt, is gedefinieerd als

$$U_{12} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Bewijs dat de arbeid gelijk is aan nul, wanneer ***F*** altijd loodrecht staat op de baan.

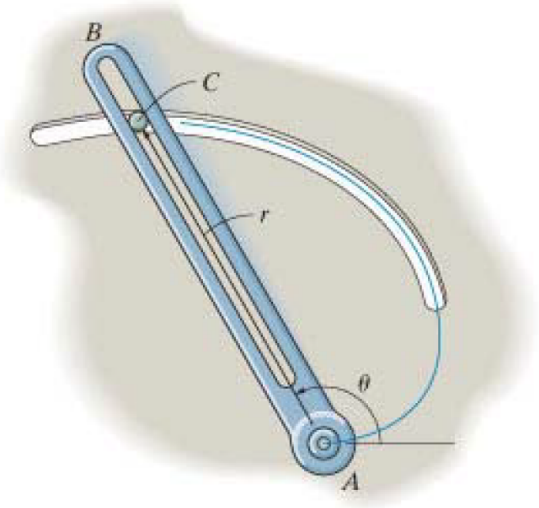
Opgave 10 [2 punten]. De 1e bewegingsvergelijking voor een star lichaam is

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}_G$$

Uitgaande van deze vergelijking, bewijs dat de stoot van ***F*** over een tijdsinterval $[t_1,t_2]$ gelijk is aan de verandering van zijn lineaire impuls over hetzelfde tijdsinterval.

Deel 2 Rekenopgaven (gebruik het invulformulier)

Opgave 1 : Pen C wordt aangedreven door de stang AB langs een spiraalvormige groef die beschreven wordt door r = 1.5θ (m), met θ in radialen. De stang begint vanuit rust (t=0 s, θ=60°) met een hoeksnelheid van ω = 4t (rad/s) te roteren, met t de tijd in seconden. Bereken op het tijdstip t=1 s op twee decimalen achter de komma:



A (1 punt). De radiale component van de snelheidsvector van C (in m/s).

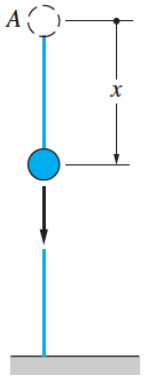
B (2 punten). De transversale component van de snelheidsvector van C (in m/s).

C (1 punt). De radiale component van de versnellingsvector van C (in m/s^2).

D (1 punt). De transversale component van de versnellingsvector van C (in m/s^2).

Opgave 2

Een bal met massa m wordt vanuit rust in het punt A losgelaten en valt naar beneden. Rekening houdend met een luchtweerstandskracht van $F_D = cv$, met v de snelheid van de bal, is de vergelijking voor de positie x(t) van de bal (g is de zwaartekrachtversnelling)



$$x(t) = \frac{mg}{c}\left(t - \frac{m}{c} + \frac{m}{c} \cdot e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

A (1 punt). Herleid een formule voor de snelheid v van de bal.

B (2 punten). Gebruik het resultaat uit A om te verklaren waarom $\frac{mg}{c}$ de "eindsnelheid" wordt genoemd.

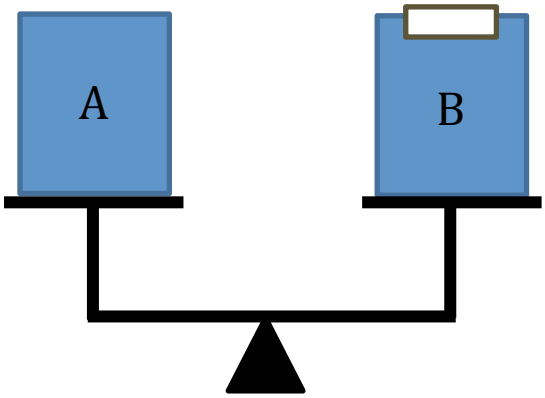
C (1 punt). Herleid een formule voor de versnelling a van de bal als functie van t.

D (2 punten). Gebruik het resultaat uit C om te bepalen wat de maximale versnelling van de bal is.

E (2 punten). Herleid een formule voor de versnelling a van de bal als functie van zijn snelheid v.

Opgave 3

Twee identieke glazen worden tot de rand gevuld met water. In de ene glas zit alleen water en in de andere drijft een ijsblokje. De inhoud van elk glas is 1liter, de dichtheid van water is 1 kg/liter, de dichtheid van ijs is 0.91 kg/liter, de zwaartekrachtversnelling is 9.81 m/s^2 en het volume van het ijsblokje is 5 cm^3.



A (2 punten). We noemen m_A de massa van het glas A inclusieve inhoud (alleen water) en m_B de massa van glas B inclusieve inhoud (water en ijsblokje). Bereken de waarde van m_A / m_B op twee decimalen achter de komma.

B (2 punten). Hoeveel van het volume van het ijsblokje bevind zich onder water? Geef het antwoord aan in % van het volume van het ijsblokje, d.w.z.,

$$100 \cdot \frac{\text{volume ijs onder water}}{\text{volume ijsblokje}}$$

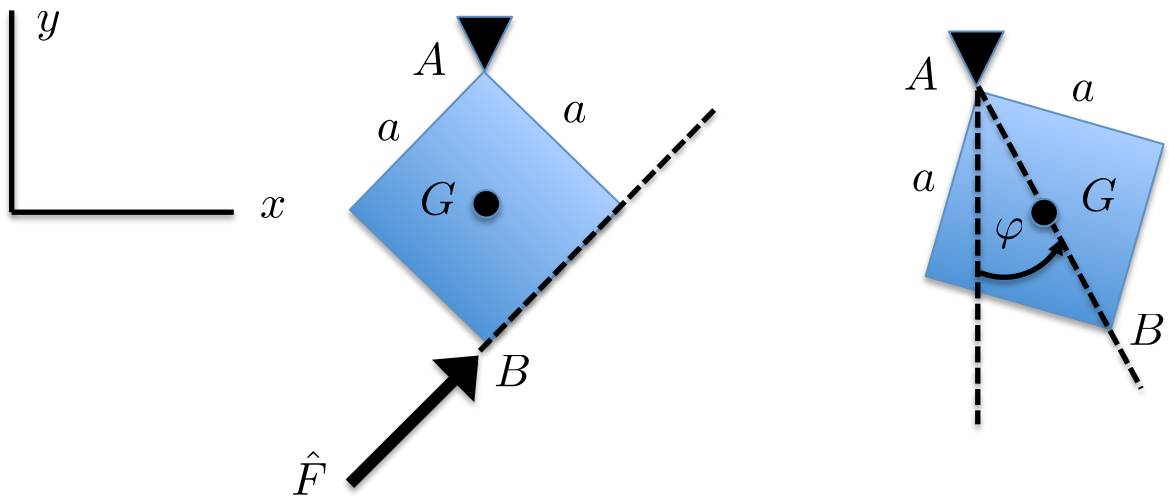
C (1 punt). Het ijsblokje smelt. Wat gebeurt er met de waterhoogte in glas B:

a. blijft gelijk
b. stijgt
c. daalt

Deel 3 Rekenopgaven (uitwerking inleveren)

Opgave 1

Een kwadratische plaat (massa m = 4 kg, lengte a = 0.50 m, traagheidsmoment om zijn massamiddelpunt G, I_G = ⅙ ma^2) is in A opgehangen (zie figuur). Op een gegeven moment ervaart de plaat een impulsieve kracht, die een stoot $\hat{F}$ = 2 Ns in de aangegeven richting veroorzaakt (zie figuur).



A (2 punten). Bereken de hoeksnelheid van de plaat vlak na de impact, ω_0 (in rad/s op 2 decimalen achter de komma).

B (1 punt). Stel ω_0 = 5 rad/s. Bereken de lineaire snelheid van G (in m/s op twee decimalen achter de komma) vlak na de impact.

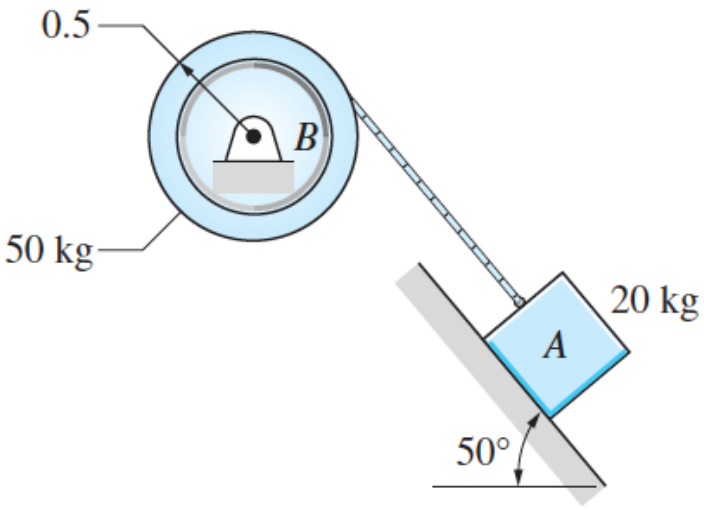
C (3 punten). Stel ω_0 = 5 rad/s. Bereken de reactiestoot in de pin A (in Ns op 2 decimalen achter de komma) en de hoek (in graad, op 1 decimaal achter de komma), die deze maakt met de x-as.

D (2 punten). Stel ω_0 = 5 rad/s. Na de impact roteert de plaat om pin A (zie rechter figuur). Herleidt de bewegingsvergelijking van de plaat in de vorm $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(\varphi)$. Neem hierbij aan dat de wrijvingskrachten in de pin A kunnen worden verwaarloosd.

E (2 punten). Stel ω_0 = 5 rad/s. Bereken de maximale hoek =φ_{max}, die de verbindingslijn A-B maakt met de verticale richting (in graad op 2 decimalen achter de komma). Additionele informatie: Het antwoord op vraag D is hiervoor NIET nodig.

Opgave 2

Een touw is om een katrol B (massa m_k = 50 kg, straal R = 0.5 m, traagheidsmoment om zijn massamiddelpunt I = ½ m_k R^2) gewikkeld en verbonden met een blok A (massa m = 20 kg) (zie figuur). Het systeem wordt vanuit rust losgelaten. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen blok en ondergrond is μ_k = 0.3.

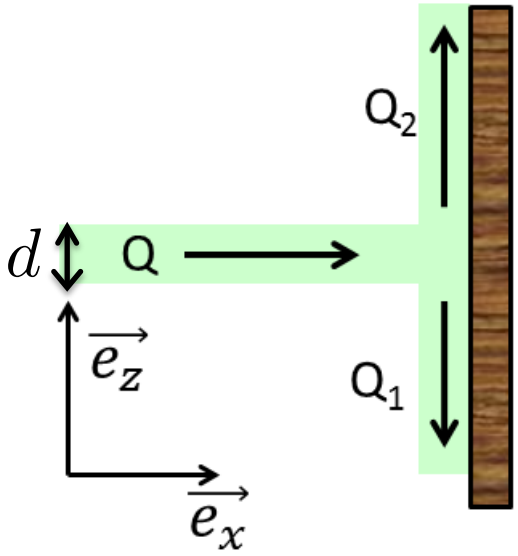


A (3 punten). Bereken de versnelling van blok A vlak na het loslaten (in m/s^2 op twee decimalen achter de komma).

B (3 punten). Stel de versnelling van blok A vlak na het loslaten is 2.80 m/s^2. Bereken de snelheid van blok A nadat hij 1 m naar beneden is gegleden.

Opgave 3

Een plaat breekt een waterstraal in tweeën. De diameter van de inkomende waterstraal is d (m). De snelheid van het water in deze straal is v (m/s) en de richting van de snelheidsvector is gelijk aan $\mathbf{e}_x$, d.w.z. $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$. De debieten (in m^3/s) gerelateerd aan de stralen worden Q, Q_1 en Q_2 genoemd, zoals aangegeven in onderstaande figuur. Het vloeistof is wrijvingsloos en de zwaartekracht wordt verwaarloosd.



A (1 punt). Geef een uitdrukking aan voor de massastroom (kg/s) van de inkomende straal als functie van v, d en de dichtheid van het water, ρ_{water}.

B (1 punt). Geef aan van welke eigenschap van een vloeistof in vraag A gebruikt is gemaakt.

C (4 punten). Bewijs m.b.v. de wetten van behoud van massa, impuls en energie (Bernoulli) dat $Q_1 = Q_2 = Q/2$.

D (1 punt). Geef aan welke aannames gemaakt moeten worden bij het oplossen van vraag C.

E (2 punten). Herleidt m.b.v. de wetten van behoud van massa, impuls en energie (Bernoulli) een formule voor de kracht, die het **water** uitoefent op de **plaat** als functie van Q, v en ρ_{water}.

F (1 punt). Geef de hoek aan (in graad, op twee decimalen achter de komma), die de in opgave E berekende kracht maakt met de x-as.

Invulformulier (alleen voor Deel 1 – conceptuele vragen)

Opgave 1 (vul in)

a. het voorwerp beweegt het langzaamst in ... B, F

b. het voorwerp beweegt naar links in ... C, D, E

c. het voorwerp verandert van richting in ... B

Opgave 2 (geef het juiste antwoord)

omhoog

Opgave 3 (geef het juiste antwoord)

gelijk

Opgave 4 (geef het juiste antwoord)

a

Opgave 5

Vraag a. Tijdens de botsing van twee puntmassa's geldt de wet van behoud van impuls. De som van de impuls van het stelsel van twee puntmassa's vlak voor de botsing is van nul verschillend. Dus moet hetzelfde ook na de botsing gelden. Hieruit volgt dat beide puntmassa's vlak na de botsing niet in rust kunnen zijn.

Opgave 5

Vraag b. Ja, dat is mogelijk. Stel $v_B=0$ en $m_A=m_B = m$ en stel we hebben te maken met een elastische botsing. Dan geldt

Impulsbehoud: $mv_A = m(\bar{v}_A + \bar{v}_B)$ **restitutiecoefficient:** $1 = \dfrac{\bar{v}_B - \bar{v}_A}{v_A - v_B}$

Oplossen van beide vergelijkingen levert: $\bar{v}_A = 0,\ \bar{v}_B = v_A$

Opgave 6 (geef het juiste antwoord)

De absolute waarde van de kracht is het grootst in C en het kleinst in B (dus antwoord b).

Opgave 7 (geef het juiste antwoord)

71% (antwoord b)

Opgave 8 (geef het juiste antwoord)

Er geldt de wet van behoud van impulsmoment omdat er geen uitwendige momenten op het stelsel werken. Op het moment dat de man de halters laat vallen, neemt zijn traagheidsmoment af, dus moet zijn hoeksnelheid toenemen. Antwoord d.

Opgave 9 (herleid)

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F} = F_t \boldsymbol{e}_t + F_n \boldsymbol{e}_n, \; d\boldsymbol{r} = ds\, \boldsymbol{e}_t$$

$$\Rightarrow U_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

Indien $F_t = 0$ volgt hieruit $U_{12} = 0$.

Opgave 10 (herleid)

$$\boldsymbol{F} = m\, \boldsymbol{a}_G \Rightarrow \hat{\boldsymbol{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{a}_G \, dt$$

$$= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}_G \, dt = m \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{v}_G = m(\boldsymbol{v}_G(t_2) - \boldsymbol{v}_G(t_1))$$

$$= \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$$

Tentamen januari 2016, deel 2, opgave 1

A $v_r = \dot{r} = (1{,}5 \cdot \theta)' = 1{,}5\omega = 6t$

$\underline{v_r(t=1) = 6{,}00 \text{ m/s}}$

B $v_\theta = r\dot{\theta} = 1{,}5 \cdot \theta \cdot \dot{\theta}$. Met $\omega = \dot{\theta} = 4t$ volgt

$\theta = 2t^2 + C$; $\theta(t=0) = 60° = \pi/3 \Rightarrow$

$C = \pi/3$ en

$\theta = 2t^2 + \pi/3$; $\theta(t=1) = 2 + \pi/3$ rad

$\Rightarrow v_\theta = 1{,}5\,(2 + \pi/3) \cdot 4 = \underline{16{,}28 \text{ m/s}}$

C $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 6 - 1{,}5(2 + \pi/3) \cdot 16 = \underline{-67{,}13 \text{ m/s}^2}$

D $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + 1{,}5(2 + \pi/3) \cdot 4$

$= \underline{66{,}28 \text{ m/s}^2}$

Tentamen jan' 2016 Oppgave 2 deel 2

$$x(t) = \frac{mg}{c}\left(t - \frac{m}{c} + \frac{m}{c}\cdot e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

A $v(t) = \dot{x}(t) = \underline{\underline{\frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)}}$

B $\lim_{t\to\infty} v(t) = \underline{\underline{\frac{mg}{c}}}$

C $a(t) = \dot{v}(t) = -\frac{mg}{c}\left(-\frac{c}{m}\right)\cdot e^{-\frac{c}{m}t} = \underline{\underline{g\cdot e^{-\frac{c}{m}t}}}$

D As $e^{-\frac{c}{m}t} > 0$ and maximum at $t = 0$, the maximal acceleration is $\underline{\underline{a_{max} = g}}$.

E $a(t) = g\cdot e^{-\frac{c}{m}t}$; $v(t) = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) = \frac{mg}{c}\left(1 - \frac{a}{g}\right)$

$\Rightarrow 1 - \frac{a}{g} = \frac{c}{mg}v$ otherwise $\underline{\underline{a = g - \frac{c}{m}v}}$

Opgave 3 :

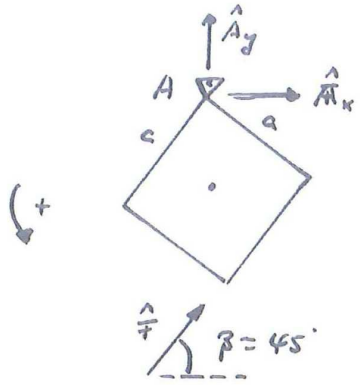
A
In glas A: $m_A = 1kg/L * 1L = 1$ kg.
In glas B: de som van de krachten die uitgeoefend wordt op het ijsblokje is nul (ijsblokje bezinkt niet) dus $m_{ijs}\, g = \rho_{ijs}\, V\, g = \rho_{water}\, V_{onder}\, g = m_{onder}\, g$ waar V_{onder} is het volume *ijs* die zich onder water bevind en V het totaal volume van het ijsblokje. De massa m_{onder} is de massa *water* die overeenkomt met het volume V_{onder}. Dus $m_{ijs} = m_{onder}$.
$m_b = 1kg/L*1L + m_{ijs} - m_{onder} = 1$ kg.

Hieruit volgt dat: $m_A / m_B =$ **1,00**

B Van hierboven: $V_{onder} / V = \rho_{ijs} / \rho_{water}$ dus **91%** bevind zich onder water

C (xx punten). Waterhoogte in glas B **blijft gelijk** omdat door het smelten er m_{ijs} *water* geproduceerd wordt. We weten (zie vraag A) dat $m_{ijs} = \rho_{water}\, V_{onder}$ dit betekend dat het volume V_{onder} nu helemaal gevuld is met water.

Tentamen jan 2016, deel 3, opgave 1



A Stootmoment-impulsmoment relatie om A (ruimtevast punt; alleen impulsieve krachten!)

$I_G = \frac{1}{6} m a^2$

$I_A = \frac{2}{3} m a^2$

$$\Sigma \hat{M}_A = \hat{F} \cdot a \overset{!}{=} \cancel{I_G \omega_0} \; I_A \cdot \omega_0$$

$\vec{\omega}_0$ = hoeksnelheid vlak na de impact

$$\Rightarrow \vec{\omega}_0 = \frac{\hat{F} \cdot a}{I_A} = \cancel{\frac{\hat{F} \cdot a}{\frac{1}{6} m a^2} = \frac{6\hat{F}}{m a}} = \cancel{12{,}00 \text{ rad/s}} = \underline{\underline{1{,}50 \text{ rad/s}}}$$

B $\omega_0 = \cancel{10{,}00}\ 5$ rad/s. Vlak na de impact roteert G om A. De lineaire snelheid van G is dan

$$v_G = \omega_0 \cdot a/\sqrt{2} = \underline{\underline{\cancel{3{,}54}\ 1{,}77 \text{ m/s}}}$$

C Stoot-impuls relatie (alleen impulsieve krachten)

$$\Sigma \hat{F}_x = \hat{A}_x + \hat{F} \cdot \cos\beta \overset{!}{=} m \cdot v_{G,x}$$

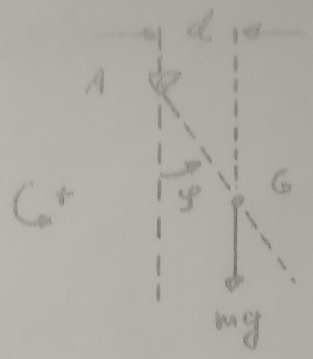
$$\Rightarrow \hat{A}_x = m v_G - \hat{F} \cdot \cos\beta = \underline{\underline{\cancel{5{,}66}\ 5{,}67 \text{ N.s}}}$$

$$\Sigma \hat{F}_y = \hat{A}_y + \hat{F} \cdot \sin\beta \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \hat{A}_y = -\hat{F} \cdot \sin\beta = \underline{\underline{\cancel{-1{,}41}\ -1{,}41 \text{ N.s}}}$$

reactiestoot $\hat{A} = \sqrt{\hat{A}_x^2 + \hat{A}_y^2} = \underline{\underline{\cancel{5{,}83}\ 5{,}83 \text{ N.s}}}$

D



2e bewegingsvergelijking: $\Sigma M_A = mg \cdot d \overset{!}{=} I_A \cdot \alpha$

met geometrie: $d = \overline{AG} \cdot \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow \alpha = \ddot{\varphi} = \frac{mg \cdot d}{I_A} = \frac{mg \cdot a}{\frac{2\sqrt{2}}{3} ma^2} \sin\varphi = \underline{\underline{\sqrt{9/8} \cdot \frac{g}{a} \cdot \sin\varphi}}$

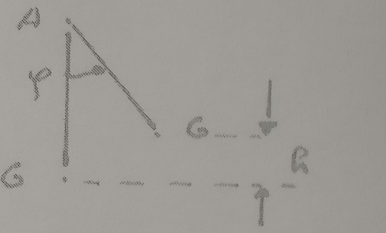
E Wet van behoud van mech energie: $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$

tijdstip 1: vlak na impact

tijdstip 2: max. hoek φ_{max}

$V_1 = 0, \quad T_1 = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} mc^2 + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \cdot \omega_0^2$

$= \frac{1}{3} ma^2 \omega_0^2$



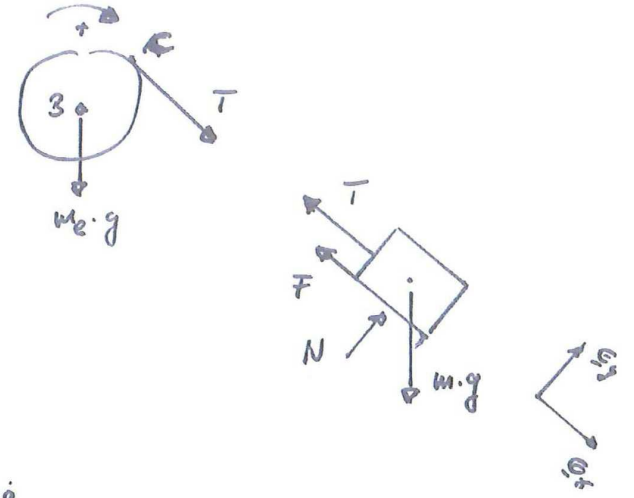
$V_2 = mg \cdot h \longleftarrow 0 =$

$T_2 = 0$

$h = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 - \cos\varphi)$

$\Rightarrow \frac{1}{3} ma^2 \omega_0^2 = mg \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}(1 - \cos\varphi_{max})$

Tentamen jan 2016, deel 3, opgave 2



hoek~~snelheid~~versnelling van de katrol, α:

$$T \cdot R = I \cdot \alpha = \tfrac{1}{2} m_e R^2 \alpha \Rightarrow \underline{T = \tfrac{1}{2} m_e R \alpha}$$

bew. vgl van blok A:

$$\Sigma F_x = -F - T + mg \sin\beta = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Sigma F_y = N - mg \cos\beta = 0 \Rightarrow N = mg \cos\beta$$

$$F = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg \cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = (-\mu_k \cos\beta + \sin\beta) \cdot g - \frac{T}{m}$$

$$= g(\sin\beta - \mu_k \cos\beta) - \tfrac{1}{2} \frac{m_e}{m} \cdot R\alpha$$

omdat C en A met dezelfde lineaire versnelling bewegen geldt: $\ddot{x} = \alpha \cdot R$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = g(\sin\beta - \mu_k \cdot \cos\beta) - \tfrac{1}{2} \frac{m_e}{m} \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{g(\sin\beta - \mu_k \cdot \cos\beta)}{1 + \tfrac{1}{2} \frac{m_e}{m}} = \frac{2m}{2m + m_e} \cdot g(\sin\beta - \mu_k \cdot \cos\beta)$$

De versnelling van blok A, $\ddot{x}$, is de constante tijdens de hele beweging:

A: $\underline{\ddot{x} = 2{,}50 \text{ m/s}^2}$

B: Stel $\ddot{x} = a_0 = \text{constant}$.

$\rightarrow \dot{x}(t) = a_0 \cdot t + C \quad ; \quad \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\dot{x}(t) = a_0 \cdot t$

$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C \quad ; \quad x(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$

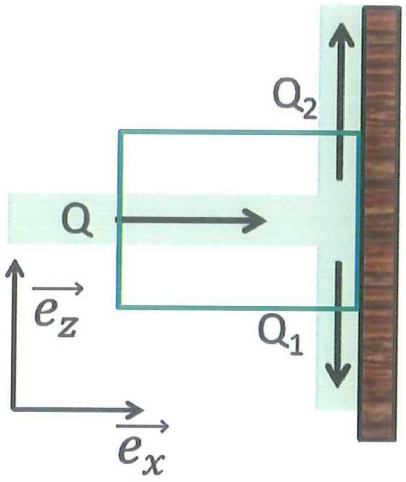
$x(t) = x_0 = 1\,m \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_0}{a_0}}$

$\rightarrow \dot{x}(t) = a_0 \cdot t = \sqrt{2 x_0 a_0} = \underline{\underline{\approx 37\ m/s}}$

snelle: $\ddot{x} = a_0 \rightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = a_0 \cdot dx$

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = a_0 \cdot x \rightarrow \dot{x} = \sqrt{2 \cdot a_0 \cdot x}$

Opgave 6 :



A –
$Q = d(V)/dt = S\,v = \pi(d/2)^2 v$
$(dm/dt) = \rho_{water}\, Q = \rho_{water}\, \pi(d/2)^2 v$ [hier hebben we gebruik gemaakt van het feit dat de vloeistof onsamendrukbaar is]

B1
behoud van massa: binnen het fictief groen doosje wordt geen massa verloren dus:
$0 = (dm/dt) - (dm_1/dt) - (dm_2/dt)$, waar m is massa die binnenkomt en m_1, m_2 massa's die naar buiten gaan.
We nemen aan dat de dichtheid van water constant is, dus hangt niet van de tijd af:
$0 = (dm/dt)/\rho_{water} - (dm_1/dt)/\rho_{water} - (dm_2/dt)/\rho_{water}$
$0 = ([dm/\rho_{water}]/dt) - ([dm_1/\rho_{water}]/dt) - ([dm_2/\rho_{water}]/dt)$
$0 = Q - Q_1 - Q_2$

Hieruit volgt: Q = Q1+Q2
Als we S de oppervlakte definiëren: $S = \pi(d/2)^2$ en: $S\,v = S_1\,v_1 + S_2\,v_2$
(sommige studenten zouden het zo kunnen schrijven)

wet van behoud van energie (Bernoulli)
aanname 1: de druk is overal de hydrostatische luchtdruk P_0
aanname 2: de zwaartekracht speelt geen rol, dus de snelheden hangen niet af van de hoogte.
aanname 3: stroming stationair (de snelheid hangt niet van de tijd af) en onsamendrukbaar

$$0.5\rho {v_1}^2 + P_0 + \rho g z = 0.5\rho {v_2}^2 + P_0 + \rho g z = 0.5\rho {v_2}^2 + P_0 + \rho g z$$

Hieruit volgt: $v = v_1 = v_2$

Behoud van impuls:

$0 = d(m\mathbf{v})/dt - d(m_1\mathbf{v}_1)/dt - d(m_2\mathbf{v}_2)/dt + \mathbf{F}$
waar $\mathbf{F}$ de kracht is die uitgeoefend is door de plaat op het fictief doosje (dus op water).
Volgens de z-as:
$0 = 0 + d(m_1v_1)/dt - d(m_2v_2)/dt + F_z$
De enige kracht uitgeoefend op de plaat komt van de druk van het water, in de richting die normaal is aan de plaat, hier dus een kracht volgens $\mathbf{e}_x$. Door deze symmetrie, $F_z = 0$, en we vinden dat: $d(m_1v_1)/dt = d(m_2v_2)/dt$, ofwel (stationaire stroming): $v_1 d(m_1)/dt = v_2 d(m_2)/dt$
We hebben al gevonden dat $v_1 = v_2$ en hieruit volgt dat: $d(m_1)/dt = d(m_2)/dt$ dus $Q_1 = Q_2$
Dankzij wet van behoud van massa gegeven hierboven, vinden we dat: $Q_1 = Q_2 = Q/2$.

B2 –
Behoud van impuls
Volgens de x-as:
$0 = d(mv)/dt + 0 - 0 + F_{plaat=>water}$

Dankzij de 3de wet van Newton:
$F_{water=>plaat} = - F_{plaat=>water} = -d(mv)/dt = - v\, d(m)/dt = - v\, \rho_{water}\, Q$

In vector notatie: $\mathbf{F}_{water=>plaat} = - v\, \rho_{water}\, Q\, \mathbf{e}_x$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

TENTAMEN

CTB1210 DYNAMICA en MODELVORMING

d.d. 16 april 2015 van 9:00 - 12:00 uur

Let op:

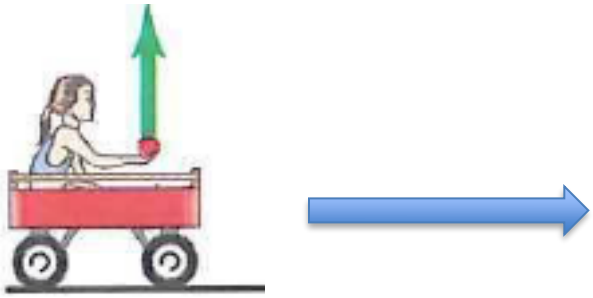
- Voor de antwoorden op de conceptuele vragen gebruikt u de invulformulieren.
- Voor de rekenopgaven in deel 2 moet u het eindresultaat (getal en eenheid) in vullen op de invulformulieren.
- Voor de rekenopgaven in deel 3 moet u de hele uitwerking inclusieve eindresultaat (getal en eenheid) indienen.
- Vergeet niet uw naam en studienummer op ALLE door u ingeleverde bladen te vermelden
- Het gewicht van de onderdelen is in de kantlijn aangegeven.
- U mag dit tentamen meenemen
- Het gebruik van een standaard (grafische) rekenmachine en van het formuleblad uit het boek van Hibbeler is toegestaan.

Deel 1: Conceptuele vragen (gebruik het invulformulier)

Vraag 1 [1/2 punt]. Vergelijk de versnelling van een motorrijder die van 80 km/uur naar 90 km/uur versnelt met de versnelling van een fietser die van 0 km/u naar 10 km/u versnelt in dezelfde tijd.

Vraag 2 [1/2 punt]. Een kind zit recht op een karretje, dat met constante snelheid naar rechts beweegt. Het kind strekt haar hand uit en gooit een appel vanuit haar gezien recht naar boven. Stel dat luchtweerstand wordt verwaarloosd. Valt de appel dan

a. achter het karretje
b. in het karretje
c. voor het karretje



Vraag 3 [1/2 punt]. Een zware vrachtauto bots met een kleine sportwagen.

a. Welk auto ervaart de grootste kracht ?
b. Welk auto ervaart de grootste versnelling ?
c. Noem in a. en b. welke van de drie wetten van Newton van toepassing is om het juiste antwoord te vinden.

Vraag 4 [1 punt]. Je kleine zus zit op een lage slee. Stel de ondergrond is horizontaal. Als je minimale kracht wilt uitoefenen om de slee te bewegen, moet je de slee dan duwen (figuur a) of trekken (figuur b)? Leg uit.

Vraag 5 [1 punt]. Een auto heeft een snelheid van 60 km/u en kan over een afstand van 20 m tot stilstand worden gebracht. Indien de auto met een snelheid van 120 km/u rijdt, naar welke afstand komt de auto dan tot stilstand (neem aan dat de remkracht onafhankelijk is van de snelheid).

a. 20 m
b. 40 m
c. 60 m
d. 80 m
e. 180 m

Vraag 6 [1/2 punt]. Een licht object en een zwaar object hebben dezelfde kinetische energie. Welke object heeft een groter impuls?
a. het lichte object
b. het zware object
c. beide objecten hebben dezelfde lineaire impuls

Vraag 7 [1/2 punt]. Stel er is een migratie van heel veel mensen in richting van de evenaar. Welke invloed heeft dit op de lengte van de dag?

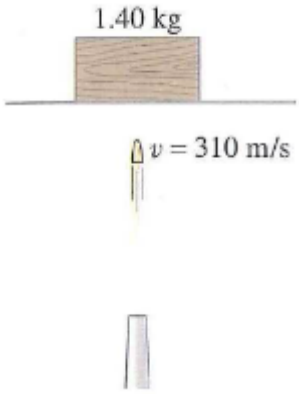
a. geen invloed
b. de lengte van de dag neemt toe
c. de lengte van de dag neemt af
d. hangt ervan af of de migratie op het zuidelijke of het noordelijke halfrond plaatsvind.

Vraag 8 [1 punt]. Een wiel roteert vrij om een verticale as met een constante hoeksnelheid. Kleine delen van het wiel komen plotseling los en vliegen weg. Welke van de volgende stellingen zijn correct? (Dit kunnen er meer dan één zijn.)

a. de hoeksnelheid van het wiel neemt af
b. de hoeksnelheid van het wiel neemt toe
c. de hoeksnelheid verandert niet
d. er is behoud van impulsmoment
e. het impulsmoment verandert
f. er is behoud van kinetische energie
g. kinetische energie verandert

Deel 2 Rekenopgaven (gebruik het invulformulier)

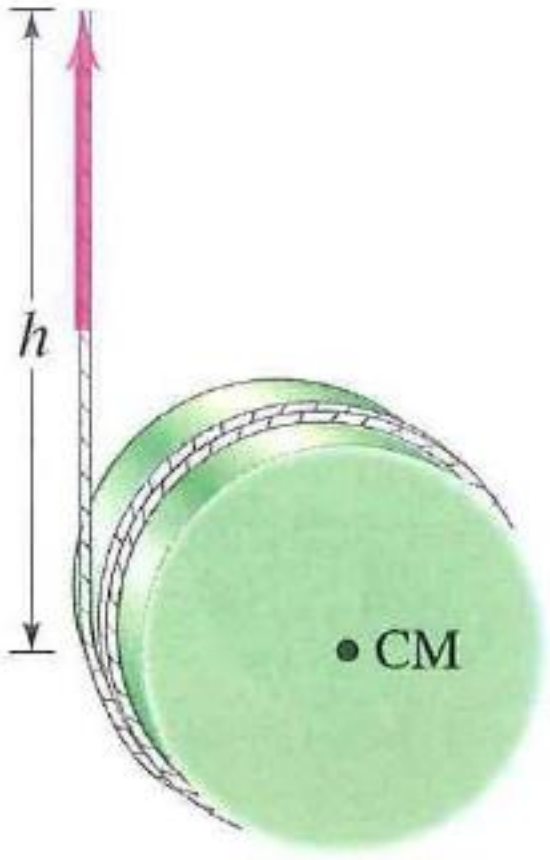
Opgave 1. Een kogel (massa m = 21.0 g, snelheid v = 310 m/s) wordt verticaal in een niet-bewegende, houden blok (massa M = 1.40 kg) geschoten. De kogel blijft in het houden blok zitten. Valversnelling g = 9.81 m/s^2.



A (2 punten). Wat is de snelheid van het blok (in m/s, 2 decimalen achter de komma) onmiddellijk naar de impact?

B (1 punt). Tot welke hoogte (in m, 2 decimalen achter de komma) beweegt het blok?

Opgave 2. Een koord zit om een homogene cilinder (massa M, straal R, massamiddelpunt CM). De cilinder begint vanuit rust naar beneden te vallen. De zwaartekrachtsversnelling bedraagt g .



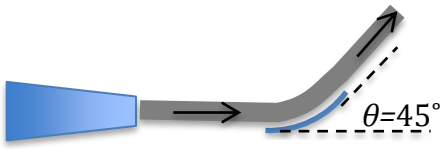
A (3 punten). Geef de formule aan voor de versnelling (a) van de cilinder.
B (2 punten). Geef de formule aan voor de spankracht (T) in het koord.
Gebruik bij A en B de symbolen zoals deze bij deze opgave gegeven zijn.

Opgave 3

Een waterstraal met diameter d=0.1m en snelheid v=2m/s spuit op een schoep zoals aangegeven in de figuur. Hierbij verandert de richting van de straal (θ=45˚), maar niet de snelheid.

A (2 punten) Hoe groot is het debiet dat uit de opening komt?

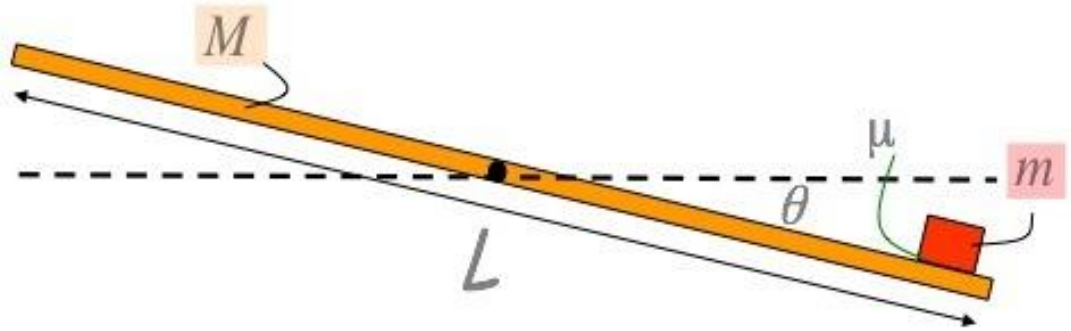
B (3 punten) Hoe groot is de kracht die de schoep op de straal uitoefent, en welke richting heeft deze ten opzichte van de horizontaal.



schoep

Deel 3 Rekenopgaven (uitwerking inleveren)

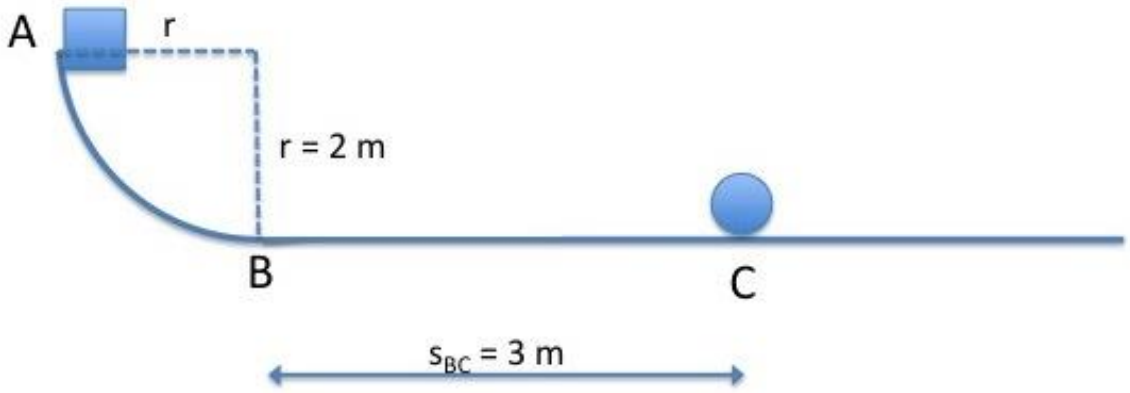
Opgave 4. Een blok (massa m = 4 kg) ligt op een ligger (massa M = 12 kg, lengte L = 4 m). Het geheel wordt vanuit rust bij $\theta = 0^o$ losgelaten. De statische wrijvings-coëfficiënt tussen blok en ligger is $\mu = 0.6$. De valversnelling is $g = 9.81\ m/s^2$.



A (3 punten). Bereken de hoekversnelling (in rad/s^2, op twee decimalen achter de komma) van de ligger op het moment $\theta = 0^o$.
Hint: gebruik de 2e bewegingsvergelijking ("rotatievergelijking") van het stelsel ligger + blok; beschouw het blokje als puntmassa op afstand L/2 van het draaipunt van de ligger.

B (4 punten). Bij welke hoek (in graden, op twee decimalen achter de komma) begint het blokje te schuiven?
Hint: gebruik de 1e bewegingsvergelijking ("translatievergelijking") van het blokje in poolcoordinaten, de vergelijking voor de hoekversnelling uit vraag A en de wet van behoud van mechanische energie voor het stelsel ligger + blokje.

Opgave 5. Onderstaande figuur toont een baan. Een blok met massa m = 1 kg heeft in A en neerwaartse snelheid van 2 m/s. Het blok beweegt langs de baan van A naar B en C en botst met een bol (massa M = 2 kg, straal R = 0.5 m), die in C rust. Het deel A-B is een kwadrant van een cirkel met straal r = 2.0 m; het deel B-C is horizontaal met een lengte van s_{BC} = 3 m. De kinetische wrijvingscoëfficiënt langs de baan is μ_k = 0.25.



A (1 punt). Teken het vrijlichaamschema van het blok voor het deel A-B en voor het deel B-C.

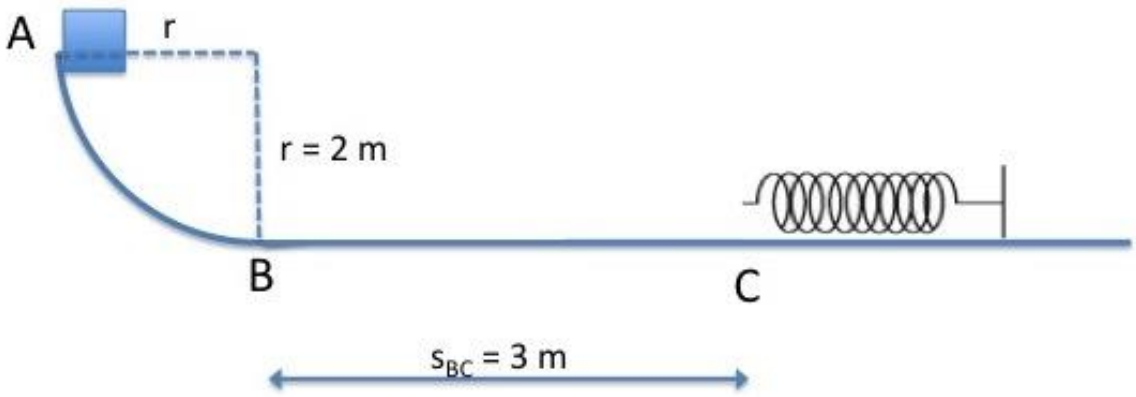
Stel dat de wrijvingskracht aan het blok E = 12.26 Nm energie onttrekt op weg van A naar B.

B (2 punten). Bereken de snelheid van het blok (in m/s, 2 decimalen achter de komma) in C net voor de botsing met de bol.

C (2 punten). Bereken de snelheid van de bol (in m/s, 2 decimalen achter de komma) onmiddellijk na de botsing. De restitutiecoëfficiënt is e = 0.9.

D (2 punten). Na de botsing zal de bol eerst glijden. Hoeveel seconden na de botsing in C begint de bol zuiver te rollen?

Opgave 6. We beschouwen de baan uit opgave 5 met als belangrijkst verschil dat er zich bij C geen bol bevindt, maar het einde van een veer. Het blok raakt op een gegeven moment de veer (veerconstante k) en drukt deze in. We beschouwen alleen de situatie gedurende de periode dat het blok in contact is met de veer.



De snelheid v van het blok kan beschreven worden met de volgende functie: $v = v_0 \sin(\omega(t - t_0) + \phi)$ waarbij t_0 het tijdstip is waarop het blok de veer raakt met een snelheid v_0. Voor het geval je een waarde van v_0 nodig hebt, kies dan v_0=5m/s.

A (2 punten). Leg uit waarom dit systeem te beschouwen is als een 2e-orde systeem. Welke waarde moet ϕ hebben om de beweging van het blok correct weer te kunnen geven?

B (3 punten). De tijd dat het duurt totdat het blok weer terug is op de positie C is $t - t_0 = 2s$. Bereken met dit gegeven de veerconstante k.

Uitwerking opgave 3

A) Het debiet is $Q = \frac{\pi}{4} d^2 v = 0.016\ m^3/s$

B) $F = \rho Q(\vec{v}_{uit} - \vec{v}_{in}) = 32\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{\jmath}\}$ dus $|F| = 32 \cdot 0.765 = 24{,}5N$

Richting t.o.v. horizontaal: $\tan(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-1\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 0.41$ dus $\theta = 157.5°$ of $2.75\ rad$

! indien $\theta = 22.5°$ of $\theta = 0.39\ rad$ ook goed rekenen!

Bij min-teken fout 1 punt aftrekken.

Uitwerking opgave 6

A) De differentiaalvergelijking van dit massa-veer systeem is van de 2e orde vandaar dat dit een tweede orde systeem genoemd wordt. Immers: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

B) Terug bij C in 2s betekent dat T=4s$= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi/\sqrt{\frac{k}{m}}$ hieruit volgt k=2.47 N/m

Antwoorden, deel 1

Vraag 1:

Gemiddelde versnelling: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

motorrijder: $\bar{a}_m = \frac{10\ km/u}{\Delta t}$

fietser: $\bar{a}_f = \frac{10\ km/u}{\Delta t}$

=> de versnellingen zijn gelijk.

Vraag 2:

De appel valt in het karretje (antwoord b.)

Argumentatie: in een coördinatenstelsel dat vast verbonden is met het karretje, beweegt het meisje niet en heeft de appel alleen een verticale beweging => appel valt weer in het handje van het meisje.

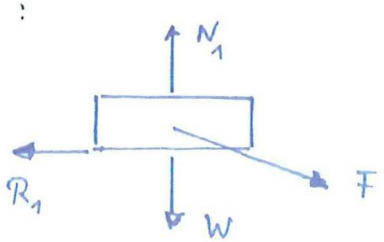
Vraag 3:

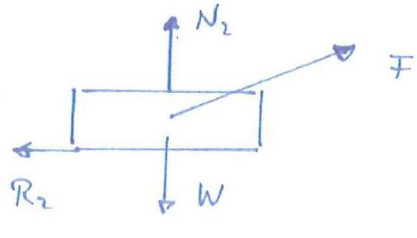
a. de krachten zijn even groot en tegengesteld

b. de kleine sportwagen, omdat zijn massa kleiner is dan de massa van de vrachtwagen

c. 3e wet van Newton voor vraag a;
2e wet van Newton voor vraag b.

Vraag 4:





$R_i = \mu_s \cdot N_i$; $i = 1,2$

$N_2 < N_1$

$\Rightarrow R_2 < R_1$

$\Rightarrow$ je moet de vrije trekken

Vraag 5 :

$s = \frac{1}{2} a t^2$; $v = a \cdot t$ $\Rightarrow$ $s = \frac{v^2}{2a}$

$v = 60$ km/u , $s = 20$ m $\Rightarrow a = 6{,}94$ m/s²

$v = 120$ km/u $\Rightarrow$ $s = \frac{v^2}{2a} = 80$ m

$\Rightarrow$ antwoord d.

Vraag 6 :

Stel $m_1 > m_2$. $T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$\Rightarrow v_1 = v_2 \cdot \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} < v_2$

$p_1 = m_1 \cdot v_1$; $p_2 = m_2 v_2$

$p_1 = m_1 \cdot v_2 \cdot \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{m_1 \cdot m_2} \cdot v_2 > m_2 v_2 = p_2$

$\Rightarrow$ het zwaar object heeft een grotere impuls (antwoord 6.)

Vraag 7 :

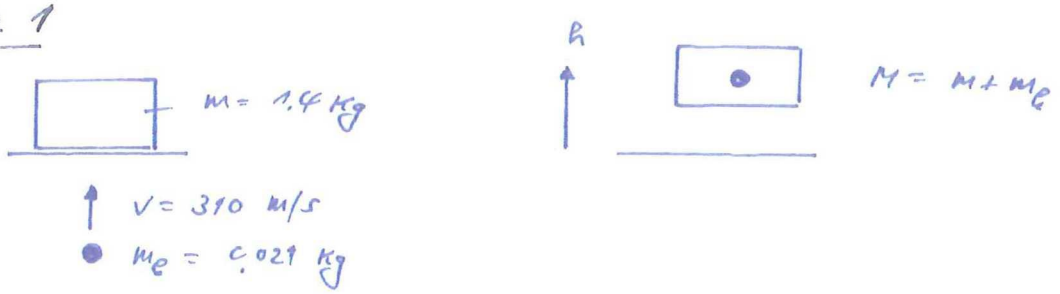
Behoud van impulsmoment. Traagheidsmoment neemt toe wanneer massa in richting van de evenaar schuift $\Rightarrow$ de hoeksnelheid neemt af $\Rightarrow$ de lengte van de dag neemt toe : (antwoord 5.)

Vraag 8 :

De volgende stellingen zijn correct : b, d, g.

Deel 2, rekenopgaven

Opgave 1



Vraag A : behoud van impuls

$$m_e \cdot v + 0 = (m + m_e) \cdot \bar{v}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = v \cdot \frac{m_e}{m + m_e}$$

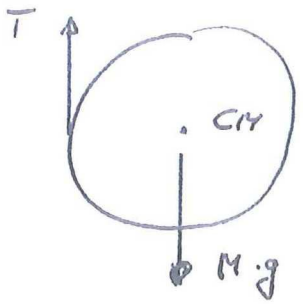
$$\bar{v} = 4{,}58 \text{ m/s}$$

Vraag B : behoud van mechanische energie

$$\frac{1}{2}(m + m_e) \cdot \bar{v}^2 = (m + m_e) \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{\bar{v}^2}{2g} = 1{,}07 \text{ m}$$

Opgave 2



1e bewegingsvergelijking : $\Sigma F = M.a$ ↓ +

$-T + Mg = Ma$ (1)

2e bewegingsvergelijking : $\Sigma M = I_{CM} \cdot \alpha$ ↻ +

$T.R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$ (2)

Een vlip turen cilinder en touw => puur-rollen => de band turen hoekversnelling α en lineaire versnelling a :

$a = \alpha . R$ (3)

Vraag A : ~~(4)~~

(3) in (2) : $TR = \frac{1}{2} MR^2 . \frac{a}{R} = \frac{1}{2} MRa$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} Ma$ (4)

(4) in (1) : $-\frac{1}{2} Ma + Mg = Ma$

$\Rightarrow \underline{a = \frac{2}{3} g}$ (5)

Vraag B :

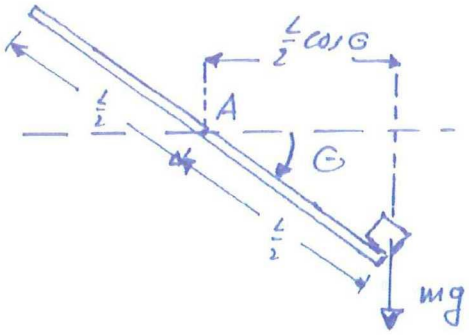
(5) in (4) : $T = \frac{1}{2} M . \frac{2}{3} g = \underline{\frac{1}{3} Mg}$

Deel 3 rekenopgaven

Opgave 4

Vraag A : 2e bewegingsvergelijking van het stelsel ligger + staaf.

$$\Sigma M_A = I_A \cdot \alpha \quad (A \text{ is vaste draaipunt!})$$



$$+\circlearrowleft \quad mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta = I_A \cdot \alpha \qquad (1)$$

traagheidsmoment van het stelsel ligger + staaf om A!

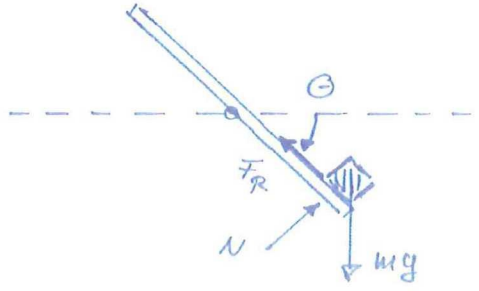
$$I_A = \frac{1}{12}ML^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot m = \frac{L^2}{12}(M+3m) \qquad (2)$$

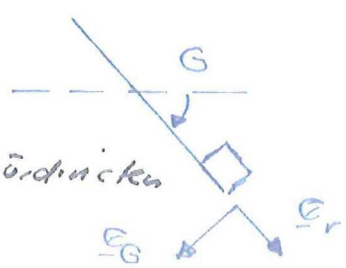
(1) opgelost naar α en met (2):

$$\alpha = \frac{6}{L} \cdot \frac{mg}{M+3m}\cos\theta \qquad (3)$$

$$\theta = \varphi \Rightarrow \alpha = \frac{6}{L} \cdot \frac{mg}{M+3m} = \underline{2{,}45 \text{ rad/s}^2}$$

Vraag B : behoud van mech. energie levert een vergelijking voor ω; de oplossing volgt dan uit de bewegingsvergelijkingen van het blokje en (3).





blokje schuift niet !

$\underline{e}_r$: $\sum F_r = m(\ddot{r} - r\omega^2) = -mr\omega^2$

$\underline{e}_\theta$: $\sum F_\theta = m(2\dot{r}\omega + r\cdot\alpha) = mr\alpha$

met $r = \frac{L}{2}$.

$\Rightarrow$ $\underline{e}_r$: $mg\sin\theta - F_R = -m\cdot\frac{L}{2}\omega^2$ (4)

$\underline{e}_\theta$: $mg\cos\theta - N = m\cdot\frac{L}{2}\cdot\alpha$ (5)

(4) en (5) zijn 2 vergelijkingen met 3 onbekenden (α is reeds bekend uit opgave A). $\Rightarrow$ we zoeken een vergelijking voor ω. ω volgt uit behoud van mech energie voor het stelsel ligger + blokje.

toestand 1: $\theta = 0$; kinetische energie $= 0$
potentiële energie $= 0$

toestand 2: $\theta > 0$; kinetische energie
$T = \frac{1}{2} I_A \omega^2$
potentiële energie
$V = -mgh = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$\Rightarrow$ $0 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$\Rightarrow$ $\omega^2 = 12\frac{g}{L}\cdot\frac{m}{M+3m}\cdot\sin\theta$ (6)

(6) in (4) : $F_R = mg\sin\theta\left[1 + 6\frac{m}{M+3m}\right]$

(3) in (5) : $N = mg\cos\theta\left[1 - 3\frac{m}{M+3m}\right]$

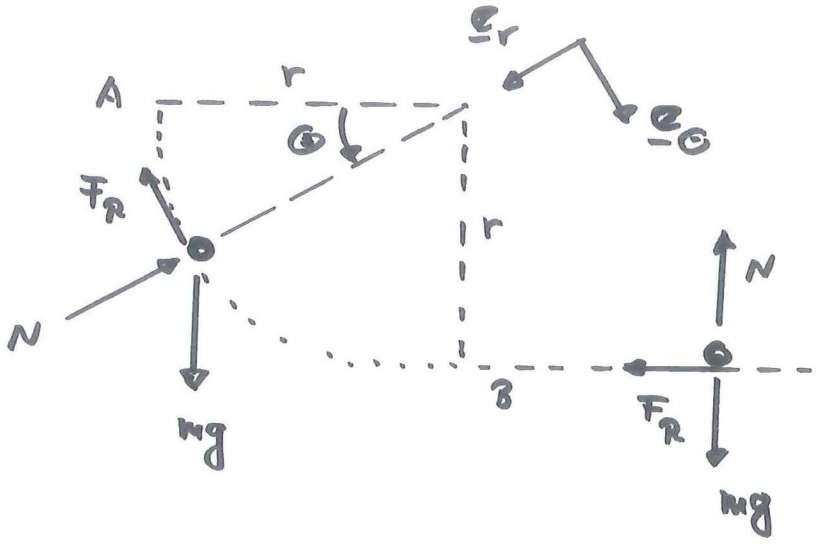
blokje begint te schuiven mits $F_R > \mu\cdot N$

$\Rightarrow$ $\tan\alpha > \dfrac{1 - 3\frac{m}{M+3m}}{1 + 6\cdot\frac{m}{M+3m}}\cdot\mu = \frac{1}{4}\mu = 0{,}15$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{\alpha > 8{,}53^\circ}}$

Opgave 5

Fig A



Vraag B arbeid - energie methode

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgr - E = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$\Rightarrow v_C^2 = v_A^2 + 2gr - \frac{2E}{m}$$

$$= 4,00 + 39,24 - 24,52 = 18,72$$

$$v_C = 4,33 \text{ m/s}$$

Vraag C:

impulsbehoud: $m v_C + 0 = m \bar{v}_C + M \cdot \bar{V}$ (1)

restitutiecoëfficiënt: $e = -\frac{\bar{v} - \bar{v}_C}{0 - v_C}$ (2)

$$\Rightarrow e \cdot v_C = \bar{v} - \bar{v}_C$$

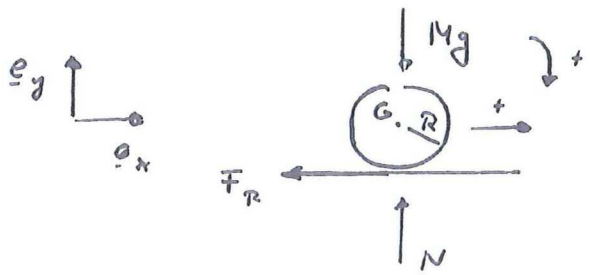
$$\bar{v}_C \text{ (f)} = \bar{v} - e \cdot v_C \quad \text{in (1)}$$

$$m v_C = m(\bar{v} - e v_C) + M \cdot \bar{V}$$

$$m v_C = \bar{v}(m + M) - e m v_C$$

$$\bar{v} = v_C \cdot \frac{m(1+e)}{m+M} = 2,74 \text{ m/s}$$

Vraag D:



e_x: $-F_R = M \cdot a_G$ (1)

e_y: $N - Mg = 0$ (2)

$$F_R \cdot R = I_G \cdot \alpha = \frac{2}{5} M R^2 \cdot \alpha \quad (3)$$

glijden: $F_R = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot Mg$ (4)

(4) in (1): $a_G = -\mu_R \cdot g \Rightarrow v_G = -\mu_c g t + \bar{v}$ (5)

(4) in (3): $\alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_c \cdot g}{R} \Rightarrow \omega = \frac{5}{2} \frac{\mu_c g}{R} t$ (6)

bol gljt tetdet $v_G(t=\tau) = \omega(t=\tau) \cdot R$:

$$-\mu_R g \tau + \bar{v} = \frac{5}{2} \mu_R g \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2}{7} \frac{\bar{v}}{\mu_R \cdot g} = \underline{\underline{0{,}32\ s}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

TENTAMEN

CTB1210 DYNAMICA en MODELVORMING

d.d. 28 januari 2015 van 9:00 - 12:00 uur

Let op:

- Voor de antwoorden op de conceptuele vragen van deel 1 gebruikt u de invulformulieren.
- Voor de rekenopgaven in deel 2 moet u het eindresultaat (getal en eenheid) in vullen op de invulformulieren.
- Voor de rekenopgaven in deel 3 moet u de hele uitwerking inclusieve eindresultaat (getal en eenheid) indienen.
- Vergeet niet uw naam en studienummer op ALLE door u ingeleverde bladen te vermelden.
- Het gewicht van de onderdelen is in de kantlijn aangegeven.
- U mag dit tentamen meenemen.
- Het gebruik van een standaard (grafische) rekenmachine en van het formuleblad uit het boek van Hibbeler is toegestaan.

Deel 1: Conceptuele vragen (gebruik het invulformulier)

Vraag 1 [1 punt].
U rijdt in uw auto achter een vrachtauto aan. U hebt dezelfde snelheid als de vrachtauto. Plotseling valt een kist van de laadruimte van de vrachtauto. Geef aan wat waar is (verwaarloosbaar hierbij het feit dat de reden dat de kist van de vrachtwagen valt een klein verschil in horizontale snelheid is):

a. De kist raakt de auto nog voor dat deze de grond raakt.
b. De kist valt op de straat zonder de auto te raken.

Vraag 2 [1 punt].
U gaat met een lift naar boven met een constante snelheid. Is uw gevoeld gewicht

a. hetzelfde als de zwaartekracht;
b. groter dan de zwaartekracht;
c. kleiner dan de zwaartekracht.

Vraag 3 [1 punt].
Is het mogelijk voor een object om te bewegen indien de resulterende kracht gelijk is aan nul? Verklaar.

Vraag 4 [1 punt].
Om een auto vanuit rust te versnellen tot een snelheid v_0 is arbeid W_1 nodig. Om de snelheid van de auto van v_0 naar $2v_0$ te verhogen is arbeid W_2 nodig. Welke antwoord is correct:

a. $W_2 = W_1$
b. $W_2 = 2W_1$
c. $W_2 = 3W_1$
d. $W_2 = 4W_1$

Vraag 5 [1 punt].
Een vriend van u maakt de opmerking dat een kracht, die altijd loodrecht staat op de snelheidsvector geen arbeid verricht. Deze uitspraak is

a. juist
b. onjuist

Vraag 6 [1 punt].
Een snowboarder beweegt op een track met een helling omhoog. Indien de snelheid onderaan de helling gelijk is aan 4 m/s dan heeft de snowboarder bovenop de helling een snelheid van 0 m/s. Stel nu dat de snowboarder met een snelheid van 5 m/s onderaan de helling beweegt. Welke snelheid heeft de snowboarder in dit geval bovenop de helling?

a. 1 m/s
b. 2 m/s
c. 3 m/s
d. 4 m/s

Vraag 7 [1 punt].
U gooit een object recht omhoog naar een persoon, die op het dak van een huis staat. Op welke punt is de kinetische energie maximaal? Op welke punt is de potentiele energie maximaal? Op welke locaties hebben deze energieën hun minimale waardes?

Vraag 8 [1 punt].
Een object dat stil op een wrijvingsloze tafel ligt wordt door een ander object geraakt. Is het mogelijk dat beide objecten direct na de botsing niet meer bewegen ? Leg uit.

Vraag 9 [1 punt].
Een star lichaam roteert om een vast as. Hebben alle punten van het starre lichaam dezelfde hoeksnelheid ? Hebben alle punten van het starre lichaam dezelfde lineaire snelheid ? Leg uit.

Vraag 10 [1 punt].
Twee bollen hebben dezelfde straal en massa. Hoe kom je er m.b.v. dynamica achter welke van de twee bollen hol is en welke massief is?

Deel 2 Rekenopgaven
(zet het eindantwoord op het invulformulier)

Opgave 1.
De kabel van een stil staande lift (M = 755 kg) scheurt op een hoogte van h=22.5 m boven de top van een grote veer (veerconstante k=8.0 10^4 N/m) op de bodem van de schacht. Valversnelling g = 9.81 m/s^2.

A (2 punten). Bereken de arbeid (in Nm) die de zwaartekracht op de lift verricht heeft net voordat de lift de veer raakt.

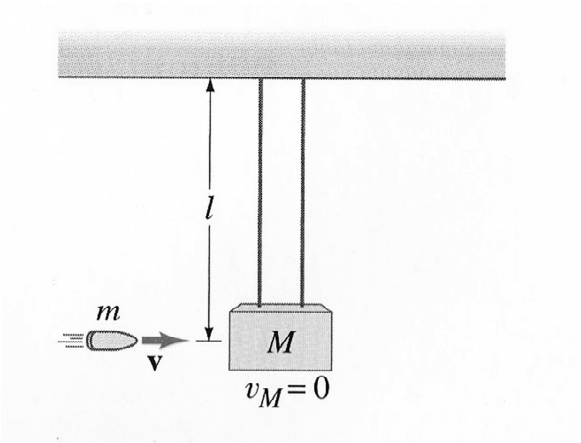
B (2 punten). Bereken de snelheid (in m/s) van de lift net voordat die de veer raakt (geef antwoord op 3 decimalen achter de komma).

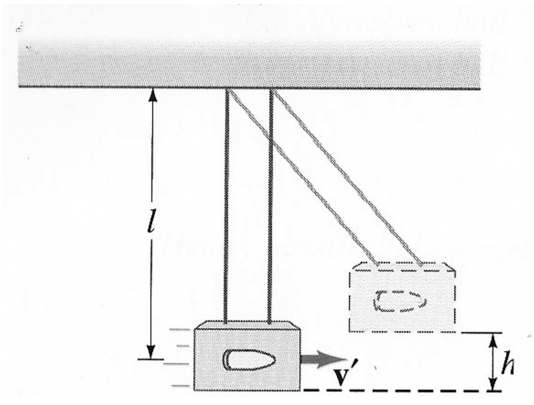
C (2 punten). Bereken hoeveel de veer wordt gecomprimeerd (in m) (geef antwoord op 3 decimalen achter de komma).

Opgave 2.
Een ballistische slinger is een apparaat dat wordt gebruikt om de snelheid van een projectiel te meten. Een projectiel (massa m = 0.02 kg) wordt in een blok van hout (massa M = 5 kg) geschoten en komt daarin vast te zitten. De houten blok is opgehangen als een slinger. Als gevolg van de botsing van het projectiel met de blok begint het stelsel projectiel + blok te slingeren en bereikt daarbij een maximale hoogte h. Valversnelling g = 9.81 m/s^2.

A (2 punten). Hoe snel was het projectiel onmiddellijk voor de botsing (v in m/s) als de blok een hoogte van h = 0.50 m bereikt (geef het antwoord op 1 decimaal achter de komma).

B (2 punten). Stel, de snelheid onmiddellijk voor de botsing was v = 800 m/s. Wat was dan de snelheid (v' in m/s) van het projectiel onmiddellijk na de botsing (geef het antwoord op 2 decimalen achter de komma).



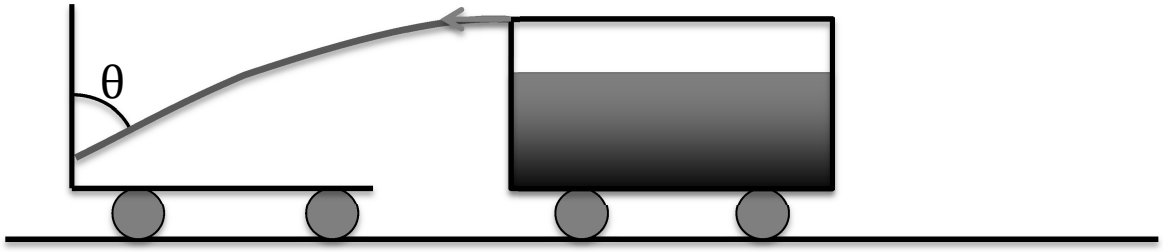


Opgave 3.

Twee karretjes staan op een horizontaal vlak. Het rechter karretje met een totale massa m_r=1000 kg staat op de rem en is gevuld met water (ρ = 1000 kg/m^3) dat met een pomp in horizontale richting weggespoten wordt, met een snelheid v=3 m/s door een opening met diameter D = 0.2 m. Dit water komt onder een hoek θ=60˚ tegen een verticale wand op het linker karretje met massa m_l = 300 kg. De grootte van de snelheid van het water is onderweg niet veranderd, de richting wel.

A (2 punten). Hoe groot is de horizontale kracht (in N) die het linker karretje ondervindt op het moment dat deze in beweging komt?

B (2 punten). Wat is de versnelling die het rechter karretje ondervindt wanneer op het tijdstip t= 5 s de rem van de wielen gehaald wordt?



Deel 3 Rekenopgaven (uitwerking inleveren)

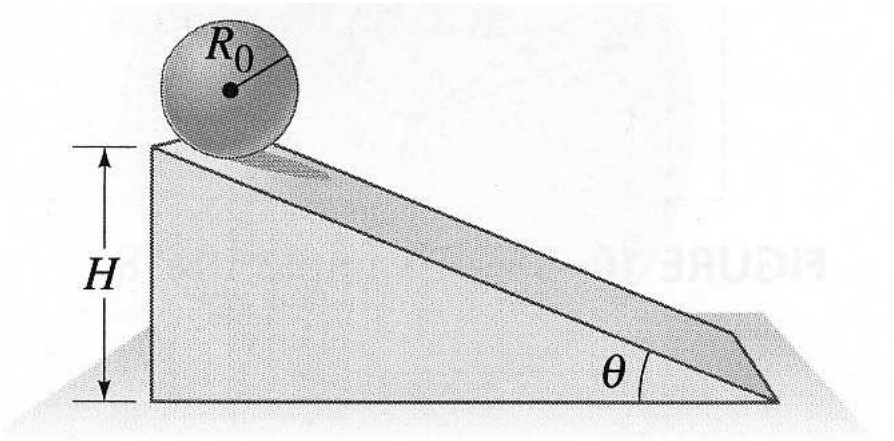
Opgave 4.

Een massieve bol (massa M = 4 kg, straal R_0=0.20 m) rolt langs een helling naar beneden (hellingshoek θ=30˚). De bol vertrekt op hoogte H = 1 m met een snelheid van 0 m/s. De valversnelling is g=9.81 m/s^2.

A (2 punten). Wat is de snelheid (in m/s) van de bol aan het einde van de helling?

B (2 punten). Een object dat langs de helling naar beneden glijdt heeft een hogere snelheid dan de bol die rolt, mits kinetische wrijving wordt verwaarloosd. Leg uit waarom dat zo is.

Opmerking: het antwoord op vraag A hoeft niet persé afhankelijk te zijn van alle gegevens.



Opgave 5.

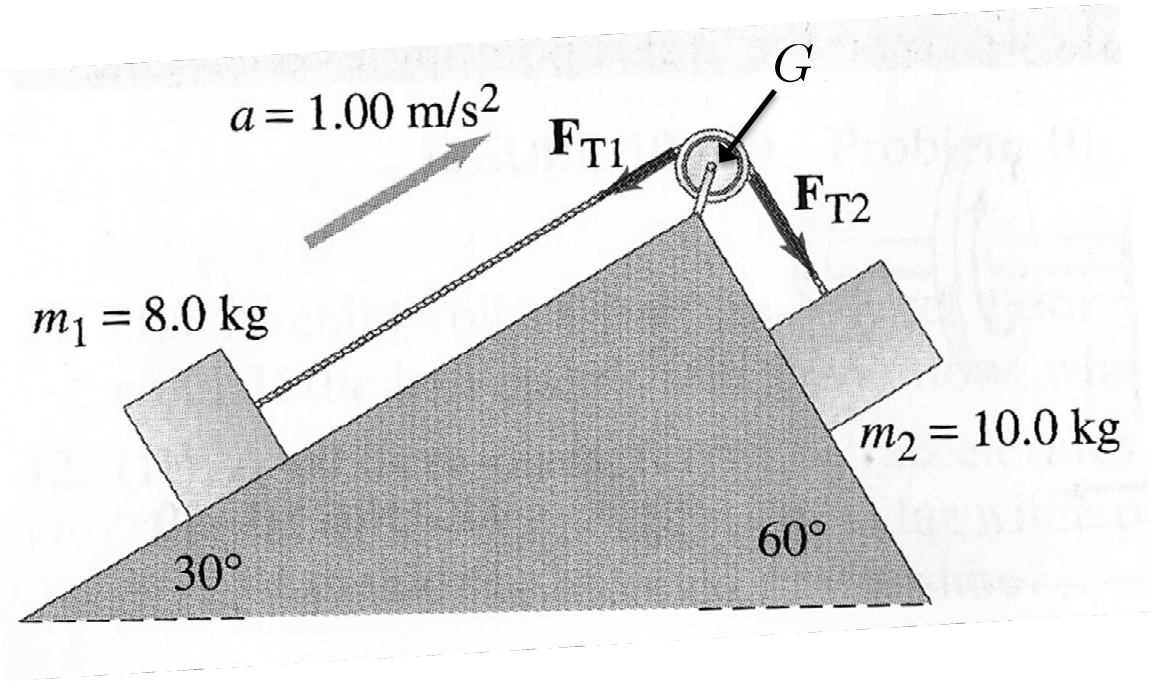
Twee blokken (massa m_1 en m_2) zijn met een kabel met verwaarloosbare massa aan elkaar verbonden. De kabel loopt over een katrol met straal R=0.25 m en traagheidsmoment I_G, met G het massamiddelpunt van de katrol. De blokken bewegen naar rechts zonder wrijving langs de getoonde hellingsvlakken met een versnelling van 1 m/s^2.

A (2 punten). Teken het vrijlichaamschema van elk blok.

B (2 punten). Bereken de spankracht F_{T1} en F_{T2} (in N) in beide delen van de kabel.

C (2 punten). Bereken het resulterende krachtmoment (in Nm) op de katrol (beschouw het krachtmoment als een positief getal en geef de richting aan door middel van een pijl).

D (2 punten). Bereken het traagheidsmoment (in kg m^2) van de katrol.



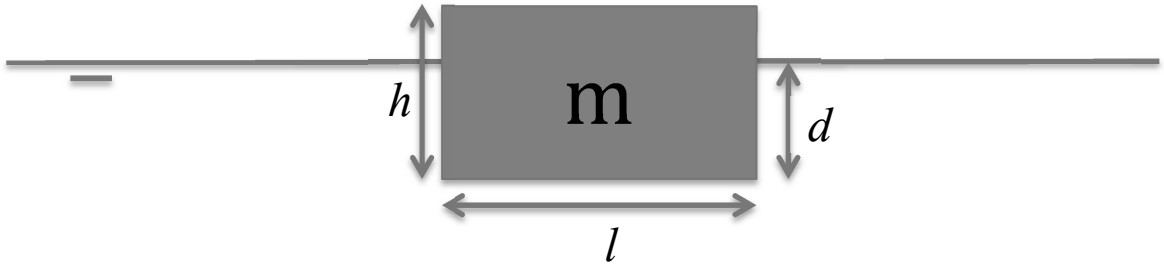
Opgave 6. (Bij deze opgave werkt u in symbolen).

Een blok hout met massa m en afmetingen b,l,h (breedte lengte hoogte) drijft in stilstaand water met dichtheid ρ zoals weergegeven in de figuur.

A (2 punten). Hoe groot is de afstand d waarmee het blok in het water steekt?

Wanneer er even kort op het midden van het blok in verticale richting geduwd wordt, gaat het blok in verticale richting op-en-neer bewegen. We verwaarlozen hierbij de effecten van vloeistofwrijving.

B (2 punten). Wat is de periodetijd waarmee het blok op-en-neer gaat bewegen rondom de evenwichtspositie? Schrijf hiertoe eerst de bewegingsvergelijking op voor de beweging van het blok ten opzichte van de evenwichtspositie uit vraag A.



Invulformulier – CTB1210

DEEL 2: rekenopgaven

Naam: **studienummer:**

Opgave 1

A	B	C
166 647,4 Nm	21,011 m/s	~~2,136~~ m 2,136

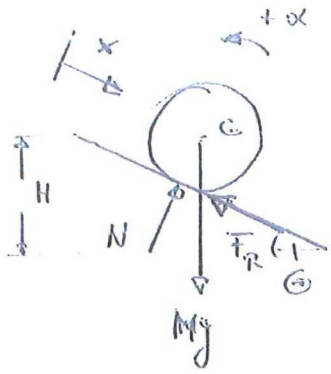
Opgave 2

A	B
786,2 m/s	3,19 m/s

Opgave 3

A	B
245 N	0,53 m/s^2

Opgave 4:



(1) $\sum F_x = -F_R + Mg\sin\theta = M\ddot{x}$

(2) $\sum F_y = N - Mg\cos\theta = 0$

(3) $-F_R R = I_G \cdot \alpha$

(4) $\ddot{x} = -\alpha R$

A.

(4) in (3) : $-F_R R = -I_G \cdot \frac{\ddot{x}}{R}$ ofwel $F_R = \frac{I_G}{R^2} \cdot \ddot{x}$ (5)

(5) in (1) : $-\frac{I_G}{R^2}\ddot{x} + Mg\sin\theta = M\ddot{x}$

ofwel $\left(M + \frac{I_G}{R^2}\right)\ddot{x} = Mg\sin\theta$

$$\ddot{x} = \frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I_G}{R^2}} =: a$$

$\ddot{x} = a =$ constant $\Rightarrow$ $\dot{x}(t) = a \cdot t$, $x(t) = \frac{1}{2}at^2$

$x(\tau) = \frac{H}{\sin\theta} \overset{!}{=} \frac{1}{2}a\tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2H}{a\sin\theta}}$

$\Rightarrow \dot{x}(\tau) = a \cdot \tau = \sqrt{\frac{2Ha}{\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{2H}{\sin\theta} \cdot \frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I_G}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2MgH}{M + \frac{I_G}{R^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{7} gH}$$

$\underline{\underline{\dot{x}(\tau) = 3{,}74 \text{ m/s}}}$

B. glijden naar beneden $\dot{x}(\tau) = \sqrt{2gH}$

$\dot{x}(\tau)$ uit A is kleiner omdat een deel van de potentiële energie (MgH) omgezet wordt in rotatie energie.

Opgave A volst ook uit een energie-beschouwing.

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \omega^2 - 0 = MgH$$

rol voor wiel: $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$, $\Rightarrow$

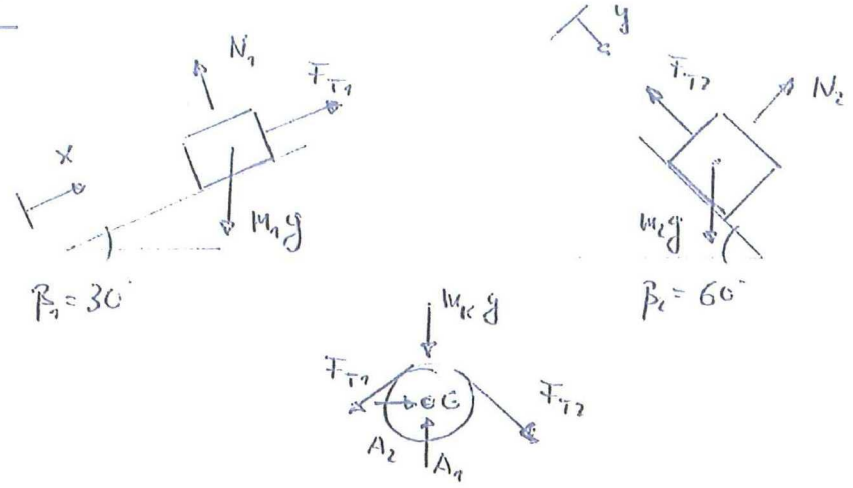
$$\dot{x}^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{I_G}{2R^2} \right) = MgH$$

$$\dot{x}^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{M}{3} \right) = MgH$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \sqrt{\frac{10}{7} gH}}}$$

Opgave 5

A



B blok 1:

$$F_{T1} - m_1 g \sin\beta_1 = m_1 \cdot \ddot{x} \qquad (1)$$

blok 2:

$$-F_{T2} + m_2 g \cdot \sin\beta_2 = m_2 \cdot \ddot{y} \qquad (2)$$

Info. mette (Kinematica): $\ddot{x} = \ddot{y} = 1 \ m/s^2$

$$\Rightarrow \quad F_{T1} = m_1 \ddot{x} + m_1 g \sin\beta_1 = \underline{\underline{47{,}24 \ N}}$$

$$F_{T2} = m_2 g \sin\beta_2 - m_2 \ddot{y} = \underline{\underline{74{,}96 \ N}}$$

C $\circlearrowleft +$

$$F_{T1} \cdot R - F_{T2} \cdot R = (F_{T1} - F_{T2}) R = \underline{\underline{-6{,}93 \ Nm}}$$

D

$$-6{,}93 = I_G \cdot \alpha \ , \qquad \alpha = -\frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad I_G = \frac{6{,}93 \cdot R}{\ddot{x}} = \underline{\underline{1{,}73 \ Kg \cdot m^2}}$$

Opgave 6:

A:

Er is evenwicht van krachten dus: $mg = \rho gdlb \; zodat \; d = m/\rho lb$

B:

Als we ten opzichte van de evenwichtspositie een verticale coordinaat z invoeren dan volgt uit de tweede wet van Newton:

$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\rho gblz$ Dit is een lineaire differentiaalvergelijking van de 2e orde met een oplossing van de vorm z=$z = \hat{z}\cos(\omega t + \phi)$. Als we dit invullen volgt voor de hoekfrequentie $\omega = \sqrt{\frac{\rho gbl}{m}}$ daarmee is de periodetijd bekend als: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gbl}}$