

WI2253CT / CTB2100

Differentiaalvergelijkingen

**Tentamenbundel Civiele Techniek
Het Gezelschap "Practische Studie"**

PAS OP: De indeling van het tentamen van Differentiaal Vergelijkingen zal die jaar anders zijn!

Voor meer informatie, zie de BrightSpace-pagina.



LET OP! EEN REPRODUCERENDE
LEERSTIJL IS SCHADELIJK VOOR
DE ACADEMISCHE VORMING



November 2017
November 2016
Oktober 2015

Januari 2017
Januari 2016
Januari 2013

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, CTB2100
vrijdag 3 november 2017, 13.30-16.30 uur

Technische Universiteit Delft
Opgesteld door: dr.ir. M. Keijzer en drs. I.A.M. Goddijn

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

Toegestane hulpmiddelen: (grafische) rekenmachine, (uitgedeeld) formuleblad.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond (> 6 op halve cijfers, < 6 op hele cijfers). De cijfers worden uiterlijk 2-12-2016 bekend gemaakt in Osiris.

2p 1. a) Bepaal de algemene oplossing $p(t)$ van: $\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 45.$

3p b) Voor de functie $x(t)$ geldt: $\frac{dx}{dt} = 2x^2 - 2x - 12.$
Gebruik een faselijn of een richtingsveld en bepaal voor alle mogelijke beginwaarden $x(0)$, de waarde van x na lange tijd: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t).$

4p c) Bereken de algemene reële oplossing $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ van
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x^2 - 2x + 2y - 2y^2; \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 2xy. \end{aligned}$$

Het stelsel heeft de volgende vier evenwichtspunten: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, -2)$ en $(3, -2)$.

2p a) Bekijk de gevallen waarbij $y(0) = -2$. Gebruik de differentiaalvergelijkingen en schets de oplossingskrommes voor verschillende waarden van $x(0)$ in het fasevlak (het xy -vlak). (Aanwijzing: opgave 1b).

3p b) Lineariseer het stelsel differentiaalvergelijkingen rond het punt $(x, y) = (0, 1)$. Laat zien dat dat het stelsel uit opgave 1c is. Wat zijn de verbanden tussen u , v , x en y ?

4p c) Bepaal het lokale gedrag van de oplossingen rond de evenwichtspunten. Benoem het type van de evenwichtspunten (inclusief of ze stabiel zijn of niet).

6p d) Schets de oplossingskrommen in het fasevlak.
Gebruik hierbij de resultaten uit 2a en 2c.

3. Gegeven is de functie $f(x) = x$, voor $0 \leq x \leq 100$.

1p a) Definieer $\hat{f}(x)$ als de even uitbreiding van $f(x)$ met periode 200.

Schets de grafiek van $\hat{f}(x)$ op het interval $-300 < x < 300$.

5p b) Bepaal de Fourierreeks van $\hat{f}(x)$.

4. Van een diep bassin (waterbak) van 100 bij 100 meter zijn drie zijanten afgesloten. Door de helft van de vierde zijkant stroomt water naar binnen. Via de andere helft van de vierde zijkant stroomt het weer naar buiten. In deze opgave wordt de snelheidspotential in het bassin berekend, en daarmee het snelheidsveld van de stroming.

Plaatscoördinaten voor het bassin zijn x met $0 \leq x \leq 100$ en y met $0 \leq y \leq 100$. We nemen aan dat de stroming rotatievrij is, niet verandert in de tijd, en dat er geen stroming in de z -richting is. De snelheidspotential is dan $\varphi(x, y)$.

De snelheid van het water in de x -richting is u , met $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Die in de y -richting is v , met $v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Voor $\varphi(x, y)$ geldt de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 100 \quad \text{en} \quad 0 \leq y \leq 100.$$

Er gelden als randvoorwaarden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(100, y) = 0 \quad \text{voor } 0 < y < 100,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 100) = g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{100}\right) \quad \text{voor } 0 < x < 100.$$

1p a) Waarom is $\varphi_x(0, y) = 0$ een toepasselijke randvoorwaarde voor de $x=0$ -kant van het bassin?

1p b) Schets het snelheidsprofiel van het water dat door de vierde zijkant ($y = 100$) stroomt. Waar stroomt het naar binnen en waar naar buiten?

1p c) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking gescheiden kan worden m.b.v. $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$.

4p d) Bepaal de randvoorwaarden voor $X(x)$ en alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan deze randvoorwaarden.

3p e) Bepaal bij elk van de in 4d gevonden oplossingen $X(x)$ de bijbehorende $Y(y)$ die voldoet aan de derde randvoorwaarde ($\varphi_y(x, 0) = 0$).

1p f) Bepaal de algemene oplossing $\varphi(x, y)$.

2p g) Bepaal de oplossing $\varphi(x, y)$ die voldoet aan de vier randvoorwaarden.

1p h) Laat zien dat de snelheidsvectoren geen component in de y -richting hebben op de lijn $x = 50$.

1p i) Stel, je vervangt de vierde randvoorwaarde door $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 100) = f(x)$ met de $f(x)$ uit opgave 3. Waarom geldt de partiële differentiaalvergelijking dan niet meer?

Antwoorden tentamen CTB2100, 3 nov. 2017

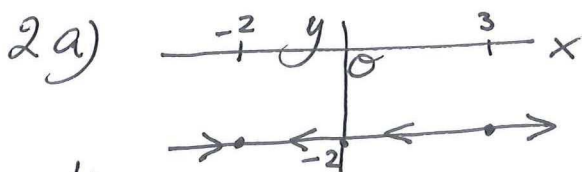
1a) $p(t) = q_0 + C_1 e^{t/2}$

b) voor $x(0) < 3$: $\lim_{t \rightarrow \infty} x = -2$

voor $x(0) = 3$: $x(t) = 3$

voor $x(0) > 3$: $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \infty$

c) $\underline{u}(t) = C_3 \begin{pmatrix} -2 \cos \sqrt{11} t \\ \cos \sqrt{11} t - \sqrt{11} \sin \sqrt{11} t \end{pmatrix} e^{-t} + C_4 \begin{pmatrix} -2 \sin \sqrt{11} t \\ \sqrt{11} \cos \sqrt{11} t + \sin \sqrt{11} t \end{pmatrix} e^{-t}$



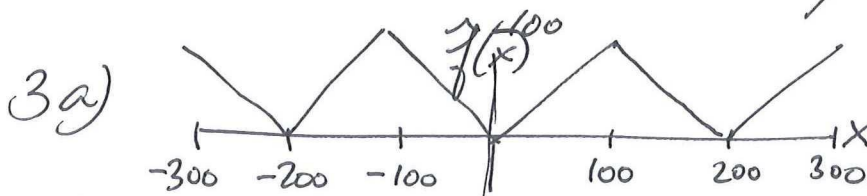
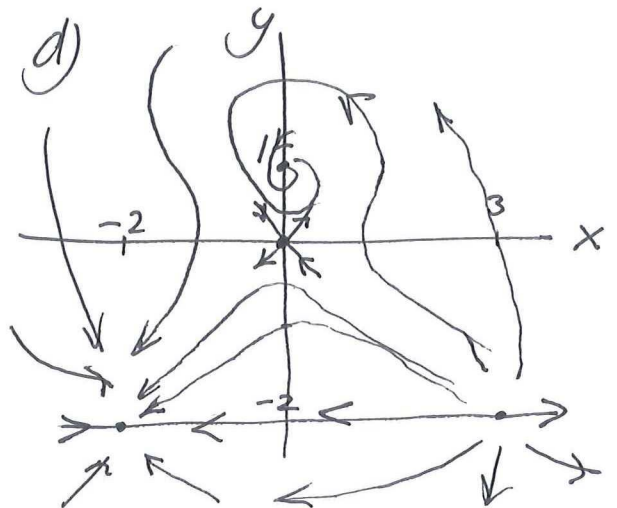
b) $u = x, v = y - 1$

c) $(0,0)$ (Instabiel) sadelpunt

$(0,1)$ Stabiel spiraalpunt

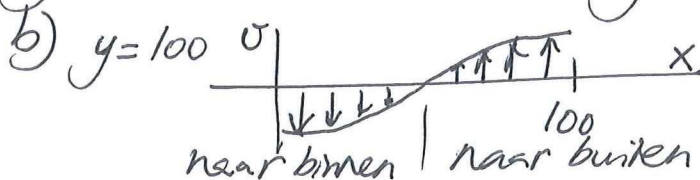
$(-2,-2)$ Stabiele knoop

$(3,-2)$ Instabiele knoop



b) $f(x) = 50 - \frac{200}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos m\pi}{m^2} \right) \cos \frac{m\pi x}{100}$

4a) $u = 0$ voor $x = 0$: er kan geen water door de muur.



c) $X'' + \sigma X = 0$
 $Y'' - \sigma Y = 0$

d) $X'(0) = X'(100) = 0$

$\sigma = \frac{k^2 \pi^2}{100^2}$: $X(x) = C_1 \cos \frac{k\pi x}{100}$
 $\sigma = 0$: $X(x) = B$

e) $\sigma = 0 : \quad \chi(y) = E$

$\sigma = \frac{k^2 \pi^2}{(100)^2} \rightarrow \chi(y) = c_3 \cosh \frac{k \pi y}{100}$

f) $\varphi(x, y) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k \pi x}{100} \cosh \frac{k \pi y}{100}$

g) $\varphi(x, y) = c_0 + \frac{100}{\pi \sinh \pi} \cos \frac{\pi x}{100} \cosh \frac{\pi y}{100}$

h)

i) Er zou alleen maar water instromen, en niet uit.
Het water niveau zou gaan stijgen, en de toestand
is niet stationair, maar hangt van de tijd af.

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, CTB2100
vrijdag 27 januari 2017, 13.30-16.30 uur

Technische Universiteit Delft
Docenten: drs. I.A.M. Goddijn en dr.ir. M. Keijzer

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

Toegestane hulpmiddelen: (grafische) rekenmachine, (uitgedeeld) formuleblad.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond (> 6 op halve cijfers, < 6 op hele cijfers). De cijfers worden uiterlijk 24-02-2017 bekend gemaakt in Osiris.

- 3p 1. a) Een haven is met een kanaal aan zee verbonden. $h(t)$ is afwijking van de gemiddelde waterhoogte in de haven. $h(t)$ hangt af van het getij en van het positieve getal M dat weer afhangt van het oppervlak van de haven en de lengte van het kanaal: $Mh'' + h = 2 \cos(\pi t/6)$.
Voor welke M treedt er resonantie op? Wat betekent dat voor de praktijk?
- 2p b) Bereken de reële algemene oplossing $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ van $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- 3p c) Bereken de reële algemene oplossing $\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$ van $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = 2x(x - y); \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 2y - 4.$$

- 1p a) Bereken de twee evenwichtspunten.
- 1p b) Bekijk de gevallen waarbij $x(0) = 0$. Gebruik de differentiaalvergelijkingen en schets de oplossingskrommes voor alle waarden van $y(0)$ in het fasevlak (het xy -vlak).
- 2p c) Laat zien dat als het stelsel differentiaalvergelijkingen gelineariseerd wordt rond de evenwichtspunten, dat de resultaten de stelsels uit opgave 1b en 1c worden. Hoe hangen x_1 en x_2 , respectievelijk x_3 en x_4 van x en y af?
- 2p d) Benoem het type van beide evenwichtspunten.
- 4p e) Schets de oplossingskrommen in het fasevlak. Gebruik ook de resultaten uit 2b.

- 5p 3. Gegeven is de functie $f(x) = x$, voor $0 \leq x \leq 10$.
Definieer $\hat{f}(x)$ als de even uitbreiding van $f(x)$ met periode 20.
Bepaal de Fourierreeks van $\hat{f}(x)$.

- 2p 4. Bepaal alle oplossingen $s(x)$ van het volgende randwaardeprobleem:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = s''(x) = 0, \quad \text{met } s'(0) = -1 \text{ en } s'(10) = -1.$$

5. Bij een kunstijsbaan wil men onderzoeken of er energie te besparen is door 's nachts de ijsvloer af te dekken met isolerende matten. In een tweede verkenning wordt geschat hoe snel de temperatuurverdeling in het ijs zich aanpast als de matten weer weggehaald worden.

De ijsvloer is 10 cm dik. Neem aan dat 's nachts de temperatuur van het ijs overal -5°C is. Op $t = 0$ worden de matten weggehaald en gaat de relatief warme lucht van de ijshal het ijs aan de bovenkant ($x = 0$) opwarmen. Tegelijkertijd wordt op $t = 0$ de koeling onder de ijsvloer ($x = 10$) aangezet: de koeling compenseert precies de warmtestroom aan de bovenkant van het ijs.

Voor $u(x, t)$, de temperatuur van het ijs (in $^{\circ}\text{C}$), geldt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 10 \quad \text{en } t > 0.$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(10, t) = -1 \quad \text{voor } t > 0 \quad (\text{beide in } ^{\circ}\text{C/cm}).$$

De beginvoorwaarde is: $u(x, 0) = -5$ voor $0 \leq x \leq 10$ (in $^{\circ}\text{C}$).

Omdat de randvoorwaarden niet homogeen zijn, wordt $u(x, t)$ gesplitst:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \quad \text{met } v(x) = -x - 5.$$

- 3p a) Laat zien dat voor $w(x, t)$ de volgende differentiaalvergelijking en rand- en beginvoorwaarden gelden:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 10 \quad \text{en } t > 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(10, t) = 0 \quad \text{voor } t > 0 \quad \text{en } w(x, 0) = x \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 10.$$

- 1p b) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking voor $w(x, t)$ gescheiden kan worden m.b.v. $w(x, t) = X(x)T(t)$.
- 4p c) Bepaal de randvoorwaarden voor $X(x)$ uit 5b en bepaal alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan deze randvoorwaarden.
- 2p d) Schets de grafieken voor $0 \leq x \leq 10$ van drie onafhankelijke oplossingen $X(x)$ uit 5c. Geef aan welke oplossingen het zijn.
- 3p e) Bepaal bij elk van de in 5c gevonden oplossingen $X(x)$ de bijbehorende $T(t)$.
- 2p f) Bepaal de algemene oplossing $w(x, t)$ die voldoet aan de randvoorwaarden.
- 2p g) Bepaal de oplossing $w(x, t)$ die ook voldoet aan de beginvoorwaarde.
- 1p h) Bepaal $u(x, t)$.
- 2p i) Als je voor de $v(x)$ een andere functie neemt: $v(x) = -x - 5 - \gamma$ met γ een ander getal dan 0, krijg je dan uiteindelijk een andere $u(x, t)$? Motiveer.

Uitwerkingen tentamen CTB2100, 27 januari 2017

1 a) Eigentrilling: homogene oplossing $Mh'' + h = 0$
 $h'' + \frac{1}{M}h = 0$ Rel $h(t) = Ae^{rt} \rightarrow r^2 + \frac{1}{M} = 0 \rightarrow r = \pm \frac{i}{\sqrt{M}}$
 $h(t) = c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{M}}t + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{M}}t$

Resonantie als de frequenties van de eigentrilling hetzelfde zijn als die van het getij: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{M}}$, dus als $M = \frac{36}{\pi^2}$.

In de praktijk zou resonantie extreem hoge ~~en~~ extreem lage waterstanden in de haven geven.

b) $\underline{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}$ $\lambda_1 = -4 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

c) $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 4 = 0$
 $(\lambda-2)^2 = -4 \rightarrow \lambda = 2 \pm 2i$

$\lambda = 2 + 2i$ eigenvector: $\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

een oplossing $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+2i)t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t)$
 $= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + i e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

Alle oplossingen: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

2 a) $x' = 0$ dus $x = 0$ of $x = y$ evenwichtspunten:
 $y' = 2x + 2y - 4 = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0$ of $4y - 4 = 0$
 $y = 2$ $y = 1$
 $(0, 2)$
 $(1, 1)$

b) Als $x(0) = 0$ dan is $x' = 0$, dus de x verandert niet meer.
Als $x(0) = 0$ dan is $y' = 2y - 4$ dalend voor $y < 2$
fase vlak
stijgend voor $y > 2$

c) $A = \begin{pmatrix} 4x - 2y & -2x \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

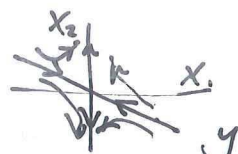
Rond $(0, 2)$ stelsel uit 1b met $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix}$

Rond $(1, 1)$ stelsel uit 1c met $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$

2d) 1b: rond (0,2) eigenwaarden $\lambda_1 = -4$ } instabiel
 $\lambda_2 = 2$ } sadelpunt

1c: rond (1,1) eigenwaarden $\lambda_{3,4} = 2 \pm 2i \rightarrow$ instabiel
 draaipunt

e) 1b: eigenvectoren bij (0,2):



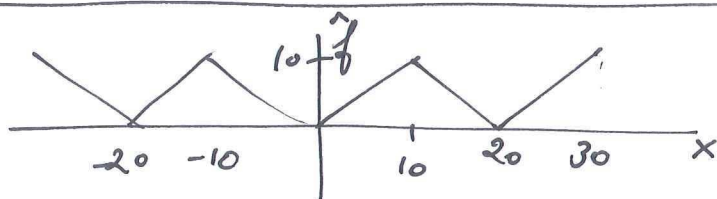
richting draaiend bij (1,1):
 richtingsvector in $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linksom



3)



$\hat{f}$ is even, dus een cosinusreeks: $\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{10}$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x dx = \frac{1}{10} [x^2]_0^{10} = 10$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{10} dx = \frac{1}{5} \int_0^{10} x \cos \frac{k\pi x}{10} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{k\pi} \int_0^{10} x d \sin \frac{k\pi x}{10}$$

$$\stackrel{p.i.}{=} \frac{2}{k\pi} \left[x \sin \frac{k\pi x}{10} \right]_0^{10} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{10} \sin \frac{k\pi x}{10} dx$$

$$= 0 + \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{10}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{10} \right]_0^{10} = \frac{20}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{40}{k^2 \pi^2}, & k \text{ oneven} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

$$\hat{f}(x) = 5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) \cos \frac{k\pi x}{10} = 5 - \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{40}{k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi x}{10}$$

4) $\mathcal{S}'' = 0 \rightarrow \mathcal{S}' = A \rightarrow \mathcal{S}(x) = Ax + B$

$\mathcal{S}'(0) = \mathcal{S}'(10) = -1 \rightarrow A = -1$, dus $\mathcal{S}(x) = -x + B$

en veel oplossingen.

$$5a) \quad v(x) = -x-5 \text{ dus } \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ en } \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \text{ en } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \text{ dus } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\text{en } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\text{randuw: } \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(0) = -1 - (-1) = 0$$

$$\text{idem voor } \frac{\partial w}{\partial x}(10,t) = 0$$

$$\text{beginuw: } w(x,0) = u(x,0) - v(x) = -5 - (-x-5) = x$$

$$b) \quad w(x,t) = X(x)T(t)$$

$$XT' = \alpha^2 X''T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\sigma \rightarrow \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + \sigma \alpha^2 T = 0 \end{cases}$$

$$c) \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0 \text{ dus } X'(0)T(t) = 0 \text{ dus } X'(0) = 0$$

$$\text{het 2e } X'(10) = 0$$

$$\sigma < 0, \text{ neem } \sigma = -\mu^2 \text{ dus } X'' - \mu^2 X = 0$$

$$\text{als } X(x) = Ae^{rx} \rightarrow r^2 = \mu^2 \rightarrow r = \pm \mu$$

$$X(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x$$

$$X'(x) = \mu c_1 \sinh \mu x + \mu c_2 \cosh \mu x$$

$$X'(0) = \mu c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(10) = \mu c_1 \sinh(10\mu) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} X'(0) = 0 \\ X'(10) = 0 \end{array} \right\} X(x) = 0$$

$$\sigma = 0: X'' = 0 \rightarrow X' = A \rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X'(x) = A, \quad X'(0) = X'(10) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow \boxed{X(x) = B}$$

$$\sigma > 0, \text{ neem } \sigma = \mu^2 \text{ dus } X'' + \mu^2 X = 0$$

$$\text{als } X(x) = Ae^{rx} \rightarrow r^2 = -\mu^2 \rightarrow r = \pm \mu i$$

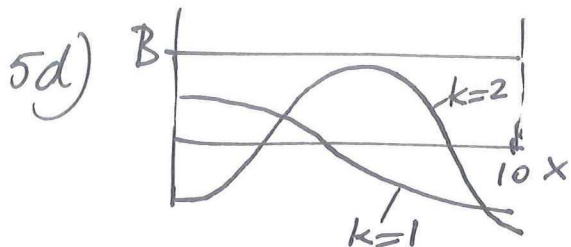
$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

$$X'(x) = -\mu c_1 \sin \mu x + \mu c_2 \cos \mu x$$

$$X'(0) = \mu c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(10) = -\mu c_1 \sin(10\mu) = 0 \Rightarrow 10\mu = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{10}$$

$$\boxed{X(x) = c_1 \cos \frac{k\pi x}{10}} \text{ en } \sigma = \frac{k^2 \pi^2}{100}$$



e) $\sigma = 0 : T' = 0 \Rightarrow T(t) = C$

$\sigma = \frac{k^2 \pi^2}{100} : T' + \frac{k^2 \pi^2}{100} T = 0 \rightarrow T(t) = C_3 e^{-\frac{k^2 \pi^2}{100} t}$

f) $w(x, t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{k\pi x}{10} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{100} t}$

g) $w(x, 0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{k\pi x}{10} \cdot 1 = x$

met opgave 3: $C_0 = \frac{a_0}{2} = 5, \quad C_k = a_k = \frac{20}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1)$

$w(x, t) = 5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) \cos \frac{k\pi x}{10} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{100} t}$

h) $u(x, t) = w(x, t) + v(x) = -x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) \cos \frac{k\pi x}{10} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{100} t}$

i) Als $v(x) = -x - 5 - \gamma$ (zie opgave 4)

dan wordt $w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = -5 - (-x - 5 - \gamma) = x + \gamma$

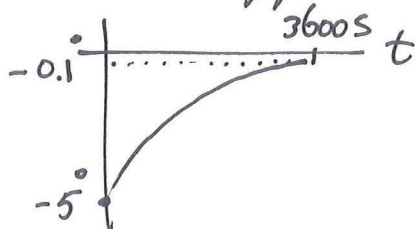
in g): $C_0 = 5 + \gamma$ en $w(x, t) = 5 + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \dots$

in h): $u(x, t) = w(x, t) + v(x) = 5 + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \dots + (-x - 5 - \gamma)$

$= -x + \sum_{k=1}^{\infty} \dots$

Deszelfde oplossing.

aan het oppervlak $x=0$:



Tentamen Differentiaalvergelijkingen, CTB2100
vrijdag 4 november 2016, 13.30-16.30 uur

Technische Universiteit Delft
Docenten: drs. I.A.M. Goddijn en dr.ir. M. Keijzer

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

Toegestane hulpmiddelen: (grafische) rekenmachine, (uitgedeeld) formuleblad.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond (> 6 op halve cijfers, < 6 op hele cijfers). De cijfers worden uiterlijk 2-12-2016 bekend gemaakt in Osiris.

- 3p 1. a) Voor de functie $x(t)$ geldt: $\frac{dx}{dt} = 2(x^2 - 1)$.
Wat zijn de evenwichtspunten? Bepaal welke evenwichtspunten stabiel zijn en welke niet, bijvoorbeeld met behulp van een faselijn.
Beschrijf hoe x zich ontwikkelt in de tijd voor alle mogelijke beginwaarden $x(0)$.

- 2p b) Herschrijf $f(t) = -4\cos(5t) + 4\sin(5t)$ in de vorm $R\cos(\omega t - \delta)$, met $R > 0$ en $\omega > 0$.

- 3p c) Bereken de reële oplossing $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{met } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Schets de grafiek van $x_1(t)$ als functie van de tijd.

2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)y; \quad \frac{dy}{dt} = x(2 - y).$$

- 1p a) Bereken de drie evenwichtspunten.
- 1p b) Bekijk de gevallen waarbij $y(0) = 2$. Gebruik de differentiaalvergelijkingen en schets de oplossingskrommes voor verschillende waarden van $x(0)$ in het fasevlak (het xy -vlak).
Aanwijzing: opgave 1a.
- 2p c) Bekijk nu de gevallen waarbij $x(0) = 1$ of $x(0) = -1$ voor verschillende waarden van $y(0)$. Schets deze oplossingskrommes in het fasevlak.
- 4p d) Bepaal het lokale gedrag van de oplossingen rond de evenwichtspunten.
Benoem het type van de evenwichtspunten.
- 5p e) Schets de oplossingskrommen in het fasevlak.
Gebruik hierbij de resultaten uit 2d, en zo mogelijk die uit 2b en 2c.

3. Gegeven is de functie $f(x) = -x$, voor $0 \leq x \leq 10$.

2p a) Definieer $\hat{f}(x)$ als de even uitbreiding van $f(x)$ met periode 20.

Schets de grafiek van $\hat{f}(x)$ op het interval $-30 < x < 30$.

5p b) Bepaal de Fourierreeks van $\hat{f}(x)$.

4. Bij een kunstijsbaan wil men onderzoeken of er energie te besparen is door 's nachts de ijsvloer af te dekken met isolerende matten. In een eerste verkenning wordt geschat hoe snel de temperatuurverdeling in het ijs zich aanpast na het isoleren.

De ijsvloer is 10 cm dik. Neem aan dat overdag de temperatuur aan de bovenkant ($x = 0$) 0°C is en onderop ($x = 10$ cm) -10°C is en daartussen lineair daalt. Na $t = 0$ wordt de bovenkant van de ijsvloer geïsoleerd en onder de vloer wordt de koeling uitgezet. Neem aan dat de vloer aan de onderkant ook geïsoleerd is voor $t > 0$.

Er geldt de volgende partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 10 \quad \text{en } t > 0.$$

Er gelden als randvoorwaarden

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(10, t) = 0 \quad \text{voor } t > 0.$$

De beginvoorwaarde is

$$u(x, 0) = f(x), \text{ uit opgave 3, voor } 0 \leq x \leq 10.$$

1p a) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking gescheiden kan worden m.b.v. $u(x, t) = X(x)T(t)$.

1p b) Bepaal de randvoorwaarden voor $X(x)$.

3p c) Bepaal alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden.

2p d) Schets de grafieken voor $0 \leq x \leq 10$ van vier onafhankelijke oplossingen $X(x)$ uit 4c. Geef aan welke oplossingen het zijn.

3p e) Bepaal bij elk van de in 4c gevonden oplossingen $X(x)$ de bijbehorende $T(t)$.

2p f) Bepaal de algemene oplossing $u(x, t)$ die voldoet aan de randvoorwaarden.

2p g) Bepaal de oplossing $u(x, t)$ die ook voldoet aan de beginvoorwaarde.

1p h) De warmtediffusiecoëfficiënt van ijs is ongeveer $\alpha^2 = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Schat de temperatuur van de bovenkant van de ijsvloer ($x = 0$) na een uur, met behulp van de eerste twee termen van de oplossing.

2p i) Maak aannemelijk dat meer termen meenemen in 4h niet nodig is.

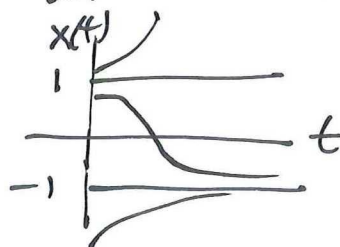
Uitwerkingen tentamen CTB2100, 4 november 2016

1a) Evenwichtspunten $x'=0$ dus $x=\pm 1$



Fase lijn $\xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} x$

$x=-1$ stabiel.
 $x=1$ instabiel



$$x(0) > 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = 1$$

$$x(0) < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1$$

b) $R = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$$-4 \cos 5t + 4 \sin 5t = 4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5t \right)$$

$$R \cos(t - \delta) = R [\cos 5t \cos \delta + \sin 5t \sin \delta]$$

$$\cos \delta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\delta = \frac{3}{4}\pi$$

c) $\begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda+1)^2 + 9 = 0$
 $\Rightarrow \lambda = -1 \pm 3i$

$\lambda = -1 + 3i$, $\underline{v}$? $\begin{pmatrix} -3-3i & -3 \\ 6 & 3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bijvoorbeeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

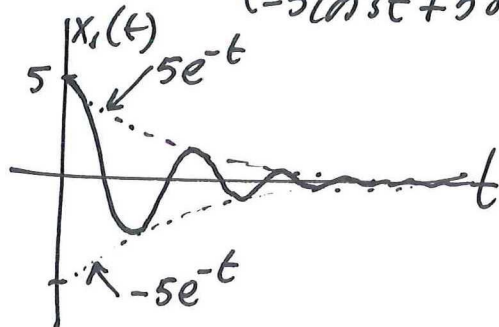
een oplossing $\underline{x} = e^{(-1+3i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

algemene oplossing $\underline{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -5$
 $c_2 = 0$

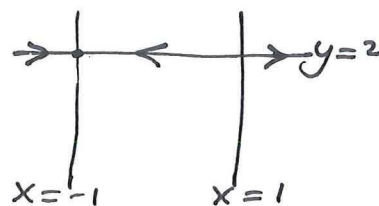
Oplossing die aan de beginv.w. voldoet:

$$\underline{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ -5 \cos 3t + 5 \sin 3t \end{pmatrix}$$

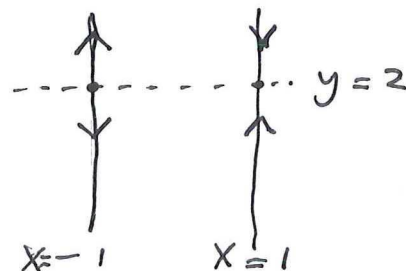


2a) $(x^2-1)y=0$ en $x(2-y)=0$
 $(x=1 \text{ of } x=-1 \text{ of } y=0)$ en $(x=0 \text{ of } y=2)$
 Evenwichtpunten: $(1,2)$, $(-1,2)$ of $(0,0)$

b) $y(0)=2 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y$ blijft 2
 $\Rightarrow x'=2(x^2-1)$ opgave 1a.



c) $x(0)=1 \Rightarrow x'=0 \Rightarrow x$ blijft 1
 en $y'=1(2-y)$ dalend als $y>2$
 stijgend als $y<2$



$x(0)=-1 \Rightarrow x'=0 \Rightarrow x$ blijft -1
 en $y'=-1(2-y)$ stijgend als $y>2$
 dalend als $y<2$

d) $(x^2-1)y = F(x,y)$
 $x(2-y) = G(x,y)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2-1 \\ 2-y & -x \end{pmatrix}$$

Rond $(0,0)$: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}' \approx \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}$

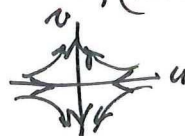
$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}i$ ~~cirkelpunt~~
 (centrum)

Rond $(-1,2)$: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}' \approx \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}$

$\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$ zadelpunt, (instabiel)

$\lambda_1 = -4 \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

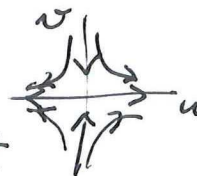
$\lambda_2 = 1 \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Rond $(1,2)$: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}' \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{u}$

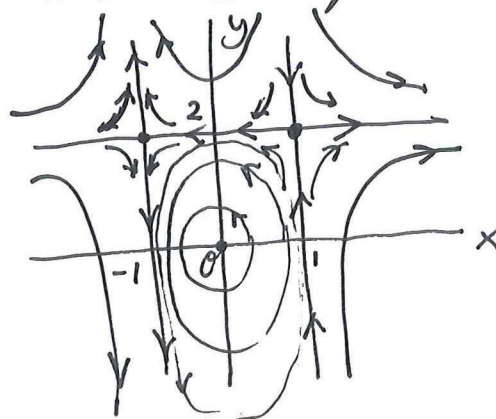
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ dus instabiel zadelpunt

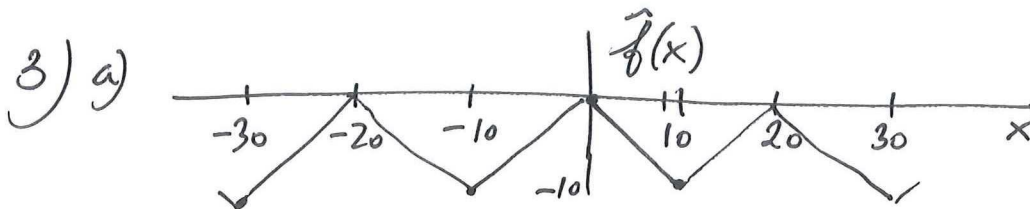
$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



richtig rond $(0,0)$:

als $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 linksom





b) $f(x)$ is even, dus een cosinusreeks:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{met } L = 10$$

$$c_0 \text{ bepalen: } \int_{-10}^{10} f(x) dx = \int_{-10}^{10} c_0 dx = [c_0 x]_{-10}^{10} = 20c_0$$

$$\begin{aligned} \text{dus } c_0 &= \frac{1}{20} \int_{-10}^{10} \underbrace{f(x)}_{\text{even}} dx = \frac{2}{20} \int_0^{10} \underbrace{f(x)}_{\text{even}} dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} -x dx = \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} [-50 - 0] = -5 \quad \text{en dat is de gemiddelde waarde van } f. \end{aligned}$$

$$a_n \text{ bepalen: } a_n \cdot L = \int_{-L}^L \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{even}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{even}} dx = 2 \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{dus } a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{10} \cdot -x dx \\ &= -\frac{2}{10} \frac{10}{n\pi} \int_0^{10} x d \sin \frac{n\pi x}{10} \end{aligned}$$

$$\text{p.i.} \quad = -\frac{2}{n\pi} \left[x \sin \frac{n\pi x}{10} \right]_0^{10} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi x}{10} dx$$

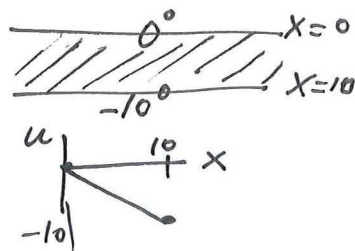
$$= 0 - \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{10}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi x}{10} \right]_0^{10} = -\frac{20}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{20}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi)$$

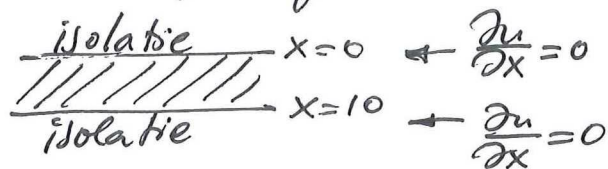
$$\text{Dus } f(x) = -5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \cos \frac{n\pi x}{10}$$

$$\left(= -5 + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{40}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{10} \right)$$

4) overdag:



15 nachts; vanaf $t=0$:



a) $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ met $u = X(x)T(t)$

$XT' = \alpha^2 X''T$ dus $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda$ dus $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda \alpha^2 T = 0 \end{cases}$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(10, t) = X'(10)T(t) = 0 \Rightarrow X'(10) = 0$

c) $\lambda < 0$, stel $\lambda = -\rho^2$ ($\rho > 0$): $X'' - \rho^2 X = 0$, $X'(0) = X'(10) = 0$

$X(x) = c_1 \cosh \rho x + c_2 \sinh \rho x$

$X'(x) = c_1 \rho \sinh \rho x + c_2 \rho \cosh \rho x$

$X'(0) = 0 + c_2 \rho = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$X'(10) = c_1 \rho \sinh 10\rho = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array} \right\} X(x) = 0$ triviale oplossing

$\lambda = 0$: $X'' = 0$ met $X'(0) = X'(10) = 0$

$X(x) = Ax + B$ en $X'(x) = A = 0 \Rightarrow X(x) = B$

$\lambda > 0$, stel $\lambda = \rho^2$ ($\rho > 0$): $X'' + \rho^2 X = 0$, $X'(0) = X'(10) = 0$

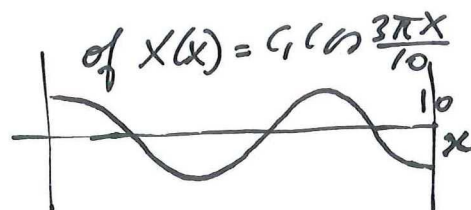
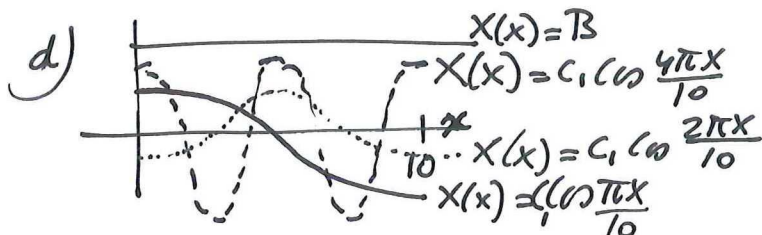
$X(x) = c_1 \cos \rho x + c_2 \sin \rho x$

$X'(x) = -\rho c_1 \sin \rho x + \rho c_2 \cos \rho x$

$X'(0) = \rho c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$X'(10) = -\rho c_1 \sin 10\rho = 0 \Rightarrow 10\rho = k\pi \Rightarrow \rho = \frac{k\pi}{10}$

en $X(x) = c_1 \cos \frac{k\pi x}{10}$ en $\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{100}$



$$4e) \lambda=0, T'=0, T(t)=c_3$$

$$\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{100}, T' + \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{100} T = 0 \rightarrow T(t) = c_4 e^{-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{100} t}$$

$$f) \lambda=0: u(x,t) = B \cdot c_3 = c_0$$

$$\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{100}: u(x,t) = c_k \cos \frac{k\pi x}{10} e^{-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{100} t}$$

$$\text{Alle } u(x,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi x}{10} e^{-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{100} t}$$

$$g) u(x,0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi x}{10} = f(x)$$

$f(x)$ moet dus even worden uitgebreid: opgave 3.

$$u(x,t) = -5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \cos \frac{n\pi x}{10} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{100} t}$$

$$h) \alpha^2 = \frac{1}{100} \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{na 1 uur: na 3600 s}$$

$$u(0, 3600) = -5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{10000} 3600}$$

$$\approx -5 + \frac{40}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 \cdot 36}{100}} + \frac{40}{9\pi^2} e^{-\frac{9\pi^2 \cdot 36}{100}} + \frac{40}{25\pi^2} e^{-\frac{25\pi^2 \cdot 36}{100}} + \dots$$

eerste
drie
termen

$$-5 + \frac{40}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 \cdot 36}{100}} \left(\approx -4,8839 \right)$$

i) De volgende termen zijn veel kleiner, door de negatieve exponent die $9x, 25x, 49x$ etc. zo groot is, en een beetje door de factor ervoor $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$ etc.

$$2^{\text{e}} \text{ term: } 0,1161$$

$$3^{\text{e}} \text{ term: } 5,83 e^{-15}$$

$$4^{\text{e}} \text{ term: } 4,30 e^{-40}$$

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, CTB2100

vrijdag 22 januari 2016, 13.30-16.30 uur

Technische Universiteit Delft

Docenten: dr. F.J. van de Bult en dr.ir. M. Keijzer

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

Toegestane hulpmiddelen: (grafische) rekenmachine, (uitgedeeld) formuleblad.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond (> 6 op halve cijfers, < 6 op hele cijfers). De cijfers worden uiterlijk 19-02-2016 bekend gemaakt in Osiris.

1. Beschouw de differentiaalvergelijking voor $y(t)$: $y' = \cos(y)$.

- 1p a) Wat zijn de evenwichtspunten van deze vergelijking in het interval $[0, 2\pi]$?
1p b) Bepaal voor elk evenwichtspunt of het stabiel is of niet.
1p c) Wat gebeurt er met de oplossing als $t \rightarrow \infty$ onder de beginwaarde $y(0) = 2$?
2p 2. Schrijf de differentiaalvergelijking

$$y''' + t^2 y'' + 3y = \cos(t)$$

als een stelsel van drie ~~lineaire~~ differentiaalvergelijkingen in y , $v = y'$ en $w = y''$.

reële-orde

3p 3. Bepaal de algemene reële oplossing van het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

4. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 - 2xy^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2x + 2y^2 - 4$$

met kritieke punten $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(0, \sqrt{2})$ en $(0, -\sqrt{2})$.

- 2p a) Laat zien dat dit stelsel rond $(1, 1)$ benaderd kan worden met een lineair stelsel. Wat is het nieuwe stelsel? Wat is het verband tussen de oude en de nieuwe variabelen?
4p b) Bepaal het type van elk kritiek punt en geef aan of de punten stabiel zijn of niet.
5p c) Schets de oplossingskrommen van dit stelsel in het fasevlak.
1p d) Wat gebeurt er met de oplossing die begint in $(-1, 2)$ als $t \rightarrow \infty$?
3p 5. Laat zien dat de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$$

gescheiden kan worden door middel van $u(x, y) = X(x)Y(y)$ en bepaal de resulterende vergelijkingen voor X en Y .

6. Gegeven is de functie $f(x) = x$ op het interval $x \in [0, 40]$.

- 2p a) Maak een schets van de oneven uitbreiding van $f(x)$ tot een 80-periodieke functie. Schets drie periodes.
- 4p b) Bepaal de Fourierreeks van deze periodieke uitbreiding.

7. De temperatuur $u(x, t)$ van een staaf van 40 cm voldoet aan de warmtevergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u wordt gerekend in °C, x in cm, t in s en α is een parameter die afhangt van het materiaal van de staaf. Op $t = 0$ is de warmteverdeling:

$$u(x, 0) = 2x, \quad x \in [0, 40]$$

Dan wordt voor $t > 0$, het ene uiteinde in ijswater gehouden en het andere uiteinde in stoom, zodat de randvoorwaarden worden:

$$u(0, t) = 0 \quad u(40, t) = 100, \quad t > 0$$

- 1p a) Bepaal de steady state oplossing $u_s(x)$ voor de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden.
- 1p b) De transiënte oplossing $v(x, t)$ is gedefinieerd als $v = u - u_s$. Laat zien dat voor v de volgende differentiaalvergelijking geldt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in [0, 40]$$

- 1p c) Laat zien dat de randvoorwaarden voor v homogeen zijn:

$$v(0, t) = 0 \quad v(40, t) = 0, \quad t > 0$$

- 1p d) De beginvoorwaarde voor v is:

$$v(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, 40]$$

Bepaal functie $g(x)$. (Mocht het bepalen van g niet lukken, dan kunt u in de rest van deze opgave $g(x) = 2x$ gebruiken.)

- 1p e) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking gescheiden kan worden m.b.v. $v(x, t) = X(x)T(t)$ en schrijf de randvoorwaarden als condities voor X en/of T .
- 3p f) Bepaal alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden.
- 2p g) Bepaal bij elk van de niet-triviale $X(x)$ de bijbehorende $T(t)$.
- 3p h) Bepaal de oplossing $v(x, t)$ die voldoet aan de randvoorwaarden en aan de beginvoorwaarde $v(x, 0) = g(x)$.
- 1p i) Bepaal de oplossing $u(x, t)$ van het oorspronkelijke probleem.
- 2p j) De temperatuur stijgt voor $t > 0$ naar de steady state oplossing. Vanaf ongeveer welk tijdstip (dat afhangt van α) is de temperatuur nog maximaal 1 graad lager dan de steady state oplossing?

Uitwerkingen tentamen CTB2100, 22 januari 2016

1a) y'  evenwichtspunten: $y'=0 \Rightarrow y=\pi/2$ of $y=\frac{3}{2}\pi$

b) faselijn  $y=\pi/2$ stabiel
 $y=\frac{3}{2}\pi$ instabiel

c)  $y(0)=2$ $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pi/2$

2) $v=y', w=y'', w'=y''' = -t^2 y'' - 3y + \cos t = -t^2 w - 3y + \cos t$
 $\begin{cases} y' = v \\ v' = w \\ w' = -t^2 w - 3y + \cos t \end{cases}$

3) $\begin{vmatrix} -13-\lambda & 6 \\ -9 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-13-\lambda)(8-\lambda) + 54 = \lambda^2 + 5\lambda - 50 = (\lambda+10)(\lambda-5) = 0$
 $\Rightarrow \lambda = -10$ of $\lambda = 5$
 $\lambda = -10, \underline{v}?$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 & | & 0 \\ -9 & 18 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-10t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$
 $\lambda = 5, \begin{pmatrix} -18 & 6 & | & 0 \\ -9 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4a) $A = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y^2 & -4xy \\ 2 & 4y \end{pmatrix}$

Rond $(1,1)$ neem $\underline{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dan is $\frac{d\underline{u}}{dt} \cong \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underline{u}$

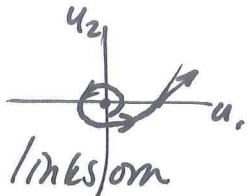
b) $(1,1)$, zie a), $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 16 = (\lambda-3)^2 + 7 = 0$
 $\lambda = 3 \pm i\sqrt{7} \rightarrow$ instabiel spiraalpunt

$(1,-1)$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \underline{u}$,

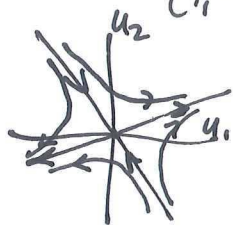
$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 16 = (\lambda+1)^2 - 17 = 0$
 $\lambda = -1 \pm \sqrt{17} \rightarrow$ instabiel zadelpunt

$(0, \sqrt{2})$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \underline{u}$, $\lambda = -4$ of $\lambda = 4\sqrt{2}$ instabiel zadelpunt

$(0, -\sqrt{2})$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y+\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix} \underline{u}$, $\lambda = -4$ of $\lambda = -4\sqrt{2}$ stabiele knoop

4c) $(1,1)$ richting? Als $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  linksom

$(1,-1)$ eigenvectoren?

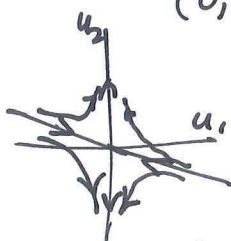


$$\lambda = -1 + \sqrt{17} \quad \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{17} & 4 \\ 2 & -3 - \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 - \sqrt{17} \end{pmatrix} \quad (\sim \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix})$$

(controle de vergelijking: $2(-4) + (-3 - \sqrt{17})(3 - \sqrt{17}) = -8 - 9 + 17 = 0$)

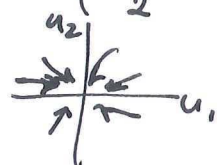
$$\lambda = -1 - \sqrt{17} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 + \sqrt{17} \end{pmatrix} \quad (\sim \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix})$$

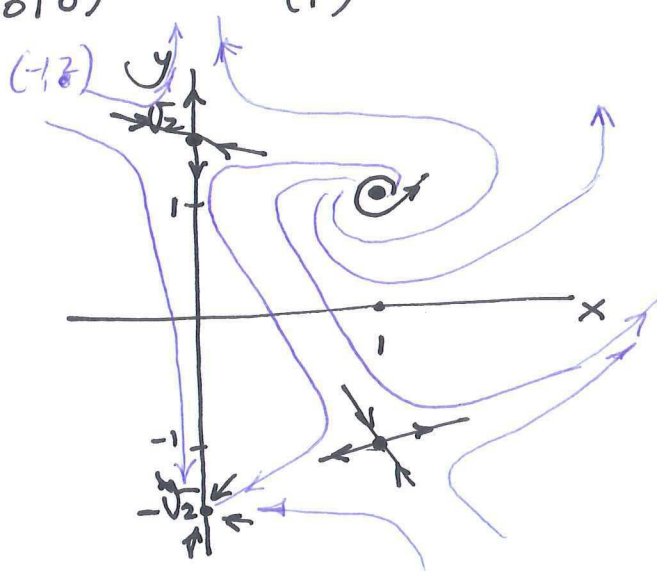
$(0, \sqrt{2})$ eigenvectoren?



$$\lambda = -4 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\sim \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$\lambda = 4\sqrt{2} \quad \begin{pmatrix} -4 - 4\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(0, -\sqrt{2})$ 



d) Als $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

dan is $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$

$u(x, y) = X(x)Y(y)$

$$X'Y' + 2X'Y = xXY'$$

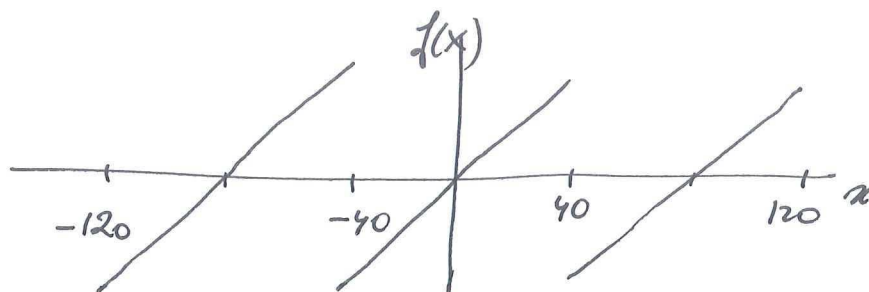
$$X'(Y' + 2Y) = xXY'$$

$$\frac{X'}{xX} = \frac{Y'}{Y' + 2Y} = \sigma$$

$$X' - \sigma xX = 0$$

$$Y' - \sigma(Y' + 2Y) = 0$$

6 a)



b) Oneven uitbreiding $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{40}$ $L=40$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{40} \int_0^{40} x \sin \frac{n\pi x}{40} dx$$

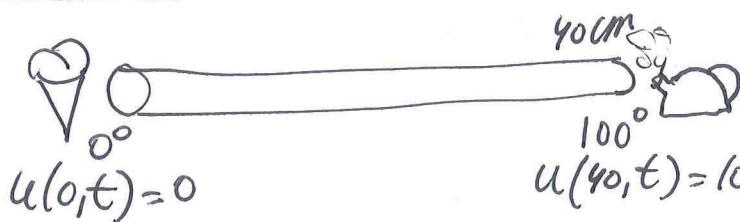
$$= -\frac{2}{40} \cdot \frac{40}{n\pi} \int_0^{40} x d \cos \frac{n\pi x}{40}$$

$$\text{p.i.} = -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{40} \right]_0^{40} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{40} \cos \frac{n\pi x}{40} dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cdot 40 \cdot \cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{40}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{40} \right]_0^{40} = -\frac{80}{n\pi} \cos n\pi$$

$$f(x) = -\frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi x}{40}$$

7)



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(40,t)=100 \quad t=0: u(x,0)=2x$$

a) $u_s(x)$ hangt niet af van t : $0 = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \Rightarrow u_s = Ax + B$

$$u_s(0)=0 \rightarrow B=0$$

$$u_s(40)=100 \text{ en } 100 = 40A + B \quad \int u_s = \frac{100}{40}x = \frac{5}{2}x$$

b) Voor u_s geldt: $\frac{\partial}{\partial t} u_s = 0$ en $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_s = 0$

Voor $v = u - u_s$ geldt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{\text{p.d.v.}}{=} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\text{dus } \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$c) v(0,t) = u(0,t) - u_s(0) = 0 - 0 = 0$$

$$v(40,t) = u(40,t) - u_s(40) = 100 - 100 = 0$$

$$d) v(x,0) = u(x,0) - u_s(x) = 2x - \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2}x = g(x)$$

$$7e) u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$XT' = \alpha^2 X''T$$

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma \quad \text{dus} \quad \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + \sigma \alpha^2 T = 0 \end{cases}$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(40,t) = X(40)T(t) = 0 \Rightarrow X(40) = 0$$

$$f) X'' + \sigma X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(40) = 0$$

$$\sigma < 0, \text{ stel } \sigma = -\mu^2, \quad X'' - \mu^2 X = 0, \quad X(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x$$

$$X(0) = c_1 = 0, \quad X(40) = c_2 \sinh(40\mu) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

$$\sigma = 0, \quad X'' = 0 \quad \text{dus} \quad X(x) = Ax + B$$

$$X(0) = B = 0, \quad X(40) = 40A = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

$$\sigma > 0, \text{ stel } \sigma = \mu^2, \quad X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

$$X(0) = c_1 = 0, \quad X(40) = c_2 \sin(40\mu) = 0$$

$$\Rightarrow 40\mu = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{40}, \quad X(x) = c_2 \sin \frac{k\pi x}{40}$$

$$\sigma = \mu^2 = \frac{k^2 \pi^2}{40^2}$$

$$g) T' + \frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} T = 0 \Rightarrow T(t) = c_3 e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} t}$$

$$h) u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{40} e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} t}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{40} = g(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$\text{met opgave 6b: } c_k = -\frac{1}{2}b_k = \frac{40 \cos k\pi}{k\pi}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k\pi} \cos k\pi \sin \frac{k\pi x}{40} e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} t}$$

$$i) u(x,t) = v(x,t) + u_s(x) = \frac{5}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k\pi} \cos k\pi \sin \frac{k\pi x}{40} e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} t}$$

$$j) \text{ Voor welke } t_1 \text{ geldt } \max_x (u_s - u(x,t_1)) \leq 1?$$

$$\max_x [-v(x,t_1)] \leq 1?$$

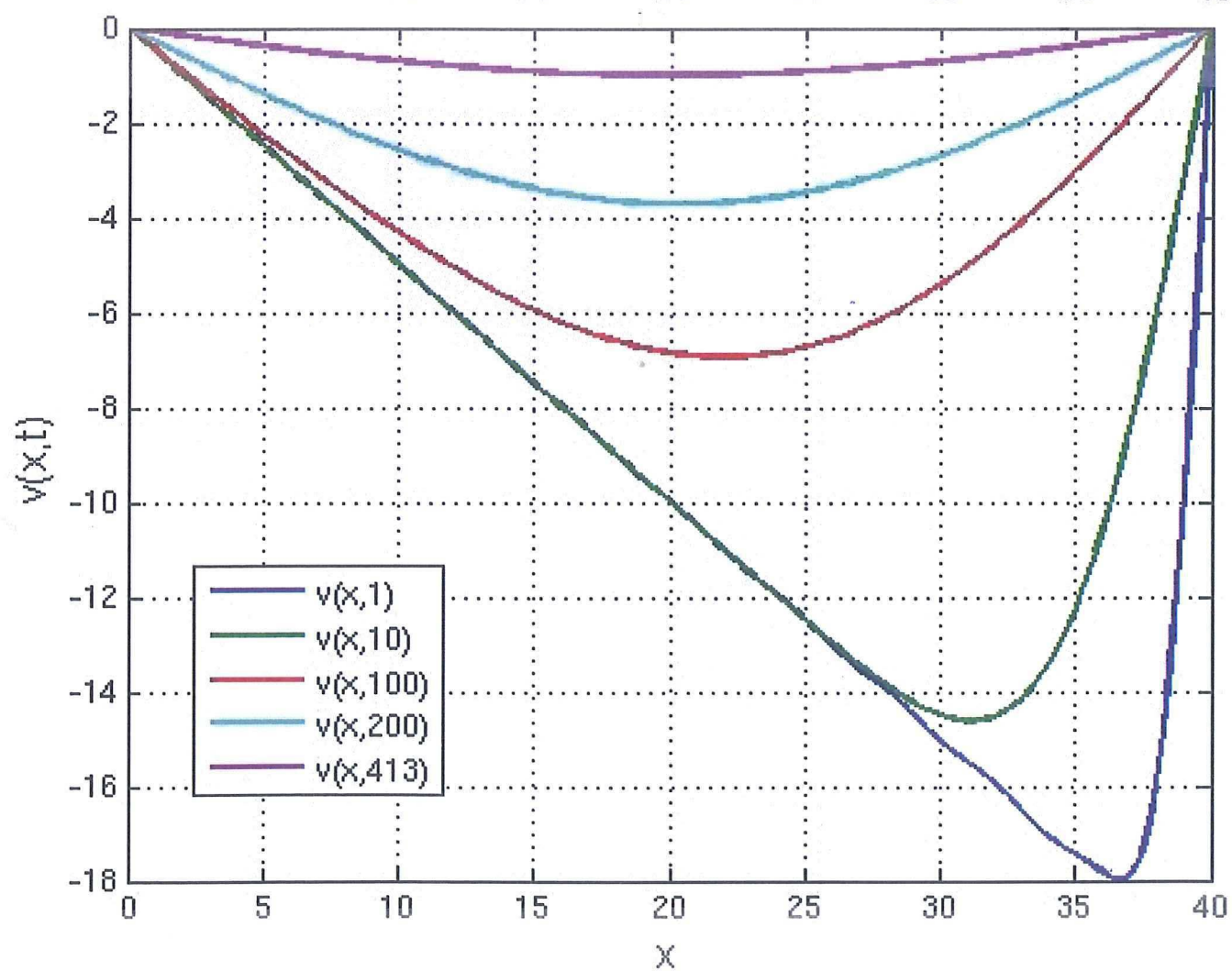
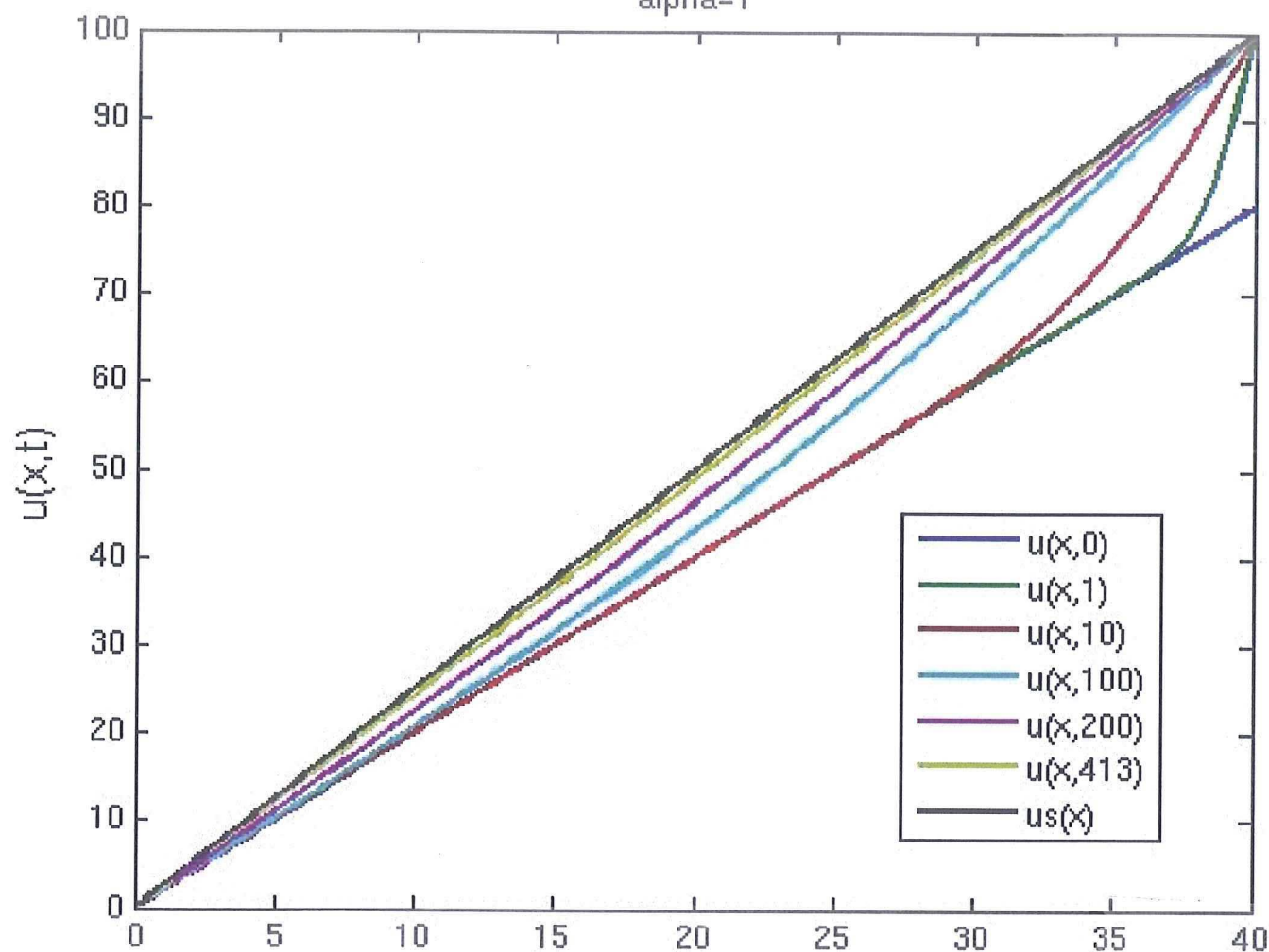
$$\max_x \left[\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{40}{k\pi} \cos k\pi \sin \frac{k\pi x}{40} e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{40^2} t_1} \right] \leq 1?$$

De $k=1$ -term is de grootste, verwaarloos de volgende termen

$$\max_x -\frac{40}{1\pi} (-1) \sin \frac{1\pi x}{40} e^{-\frac{\alpha^2 1^2 \pi^2}{40^2} t_1} \leq 1 \quad \text{maximaal voor } x=20$$

$$\frac{40}{\pi} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{40^2} t_1} \leq 1 \Rightarrow t_1 \geq \frac{40^2}{\alpha^2 \pi^2} \ln \frac{40}{\pi} \approx \frac{412,4}{\alpha^2} \text{ s}$$

$\alpha=1$



Tentamen Differentiaalvergelijkingen, CTB2100

vrijdag 30 oktober 2015, 9.00-12.00 uur

Technische Universiteit Delft

Docenten: dr. F.J. van de Bult en dr.ir. M. Keijzer

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

Toegestane hulpmiddelen: (grafische) rekenmachine, (uitgedeeld) formuleblad.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond (> 6 op halve cijfers, < 6 op hele cijfers). De cijfers worden uiterlijk 30-11-2016 bekend gemaakt in Osiris.

- 3p 1. a) Voor de populatie $P(t) \geq 0$ geldt: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P(P - 10)$.
Wat zijn de evenwichtspunten? Bepaal welke evenwichtspunten stabiel zijn en welke niet, bijvoorbeeld met behulp van een faselijn.
Beschrijf hoe de populatie zich ontwikkelt in de tijd voor alle mogelijke beginwaarden $P(0) \geq 0$.

- 2p b) Herschrijf $f(t) = -3 \cos(\pi t) - 2 \sin(\pi t)$ in de vorm $R \cos(\omega t - \delta)$.
Bepaal dus de waarden van $R > 0$, $\omega > 0$ en δ .

- 3p c) Bereken de algemene reële oplossing $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y^2; \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2.$$

- 1p a) Laat zien dat $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ en $(1, 1)$ evenwichtspunten zijn.
- 2p b) Laat zien dat als het stelsel differentiaalvergelijkingen gelineariseerd wordt rond het punt $(x, y) = (1, 1)$, het resultaat het stelsel uit opgave 1c wordt.
Hoe hangen $u(t)$ en $v(t)$ af van $x(t)$ en $y(t)$?
- 4p c) Bepaal het lokale gedrag van de oplossingen rond de evenwichtspunten.
Benoem het type van de evenwichtspunten en of ze stabiel zijn of niet.
- 5p d) Schets de oplossingskrommen in het fasevlak (het xy -vlak).
- 2p e) Beschrijf in woorden, zonder verdere berekeningen, waar de oplossingen (x, y) zich na oneindig lange tijd ($t \rightarrow \infty$) kunnen bevinden in het fasevlak.

3. Gegeven is de functie
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{voor } 0 \leq x < 49 \\ 100, & \text{voor } 49 \leq x \leq 51 \\ 0, & \text{voor } 51 < x < 100. \end{cases}$$

2p a) Definieer $\hat{g}(x)$ als de oneven uitbreiding van $g(x)$ met periode 200.

Schets de grafiek van $\hat{g}(x)$ op het interval $-300 < x < 300$.

4p b) Bepaal de Fourierreeks van $\hat{g}(x)$.

4. We bekijken een pianosnaar van 100 cm.

De snaar wordt precies in het midden aangeslagen met een hamertje van 2 cm breed. (In de praktijk worden pianosnaren juist niet in het midden aangeslagen. In vraag 4h ziet u de reden daarvoor.)

Noem $u(x, t)$ de uitwijking van de snaar, gerekend in *cm* en de tijd in secondes.

Er geldt:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{voor } 0 < x < 100 \quad \text{en } t > 0.$$

Hier hangt parameter a af van het type snaar en hoe strak hij is gespannen.

De snaar is ingeklemd:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{en} \quad u(100, t) = 0, \quad \text{voor } t > 0,$$

en de beginwaarden zijn:

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 100,$$

waarin $g(x)$ de functie uit opgave 3 is (met als eenheid *cm/s*).

1p a) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking gescheiden kan worden m.b.v. $u(x, t) = X(x)T(t)$.

3p b) Bepaal alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden.

2p c) Schets de grafieken van drie onafhankelijke oplossingen $X(x)$ voor $0 \leq x \leq 100$. Schrijf erbij welke oplossingen u precies schetst.

2p d) Bepaal bij elk van de niet-triviale $X(x)$ de bijbehorende $T(t)$.

3p e) Bepaal de algemene oplossing $u(x, t)$ die voldoet aan de randvoorwaarden en aan de beginvoorwaarde $u(x, 0) = 0$.

2p f) Bepaal de oplossing $u(x, t)$ die ook aan de andere beginvoorwaarde voldoet.

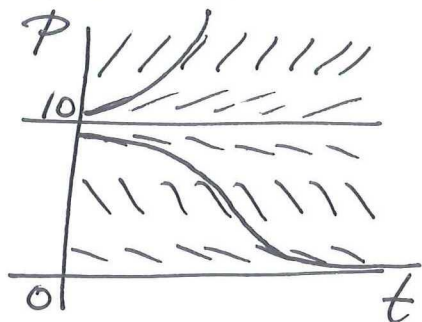
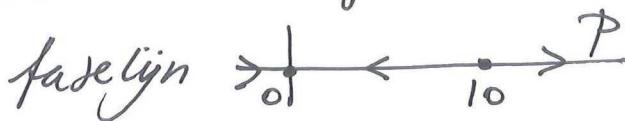
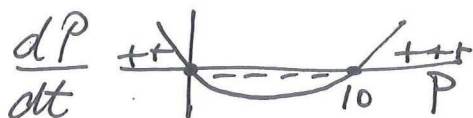
2p g) De snaar is zo gestemd dat de grondtoon ervan een frequentie van 261.6 Hz heeft, oftewel 261.6 trillingen per seconde (de C van het middelste octaaf in de zogenaamde ‘gelijkzwevende stemming’). Bereken parameter a voor deze snaar. Geef ook de eenheid van a .

2p h) Het hamertje slaat precies in het midden van de snaar. Laat zien dat maar de helft van de modes (grondtoon en boventonen) wordt aangeslagen.

Uitwerkingen Tentamen differentiaalvergelijkingen

CTB 2100 30 oktober 2015

1 a) evenwichtspunten $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = 0$ of $P = 10$



voor $0 \leq P(0) < 10$: dalen naar 0
 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$

voor $P(0) \neq 10$: $P(t) = 10$ constant

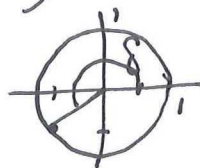
voor $P(0) > 0$: (exponentiële) groei
 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$

b) $R = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$f(t) = R \cos(\omega t - \delta)$

$f(t) = \sqrt{13} \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} \cos \pi t - \frac{2}{\sqrt{13}} \sin \pi t \right) = R (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta)$

Dus $\omega = \pi$ en $\cos \delta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$
 $\sin \delta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$



$\delta = \pi + \arctan \frac{2}{3}$
 $= \pi + \arccos(3/\sqrt{13})$
 $= \pi + \arcsin(2/\sqrt{13})$
 $= -\arccos(-3/\sqrt{13})$

c) $\underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{u}$ Eigenwaarden: $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda + 1)^2 = -3$
 $\lambda = -1 \pm i\sqrt{3}$

eigenvector bij $\lambda = -1 + i\sqrt{3}$:

$\begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{3} & -2 \\ 2 & -1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (bijvoorbeeld)

een oplossing $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(-1 + i\sqrt{3})t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t} (\cos \sqrt{3}t + i \sin \sqrt{3}t)$
 $= e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos \sqrt{3}t \\ \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin \sqrt{3}t \\ \sin \sqrt{3}t - \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}$

alle oplossingen:

$\underline{u} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos \sqrt{3}t \\ \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin \sqrt{3}t \\ \sin \sqrt{3}t - \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}$

$$2) \frac{dx}{dt} = 1 - y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y^2$$

a) in $(\pm 1, \pm 1)$ geldt $x^2 = y^2 = 1$
 dus $x' = 1 - 1 = 0$ en $y' = 1 - 1 = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$ Rond $(1, 1)$:
 $\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

en $\underline{u}' = A|_{\underline{x}=(1,1)} \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{u}$

c) Rond $(1, 1)$: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ (som 1C) $\Rightarrow$ stabiel spiraalpunt

Rond $(1, -1)$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 5 = 0$
 ~~$(\lambda-1)^2 = 5$~~ $\Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$
 instabiel sadelpunt

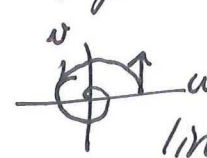
Rond $(-1, 1)$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{3}$
 instabiel sadelpunt

Rond $(-1, -1)$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = -3 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$
 instabiel spiraalpunt

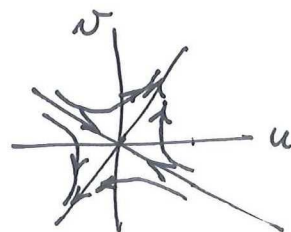
d) Rond $(1, 1)$ richting?

Als $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  linksom

Rond $(1, -1)$ eigenvectoren?

$\lambda = 1 + \sqrt{5}$: $\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

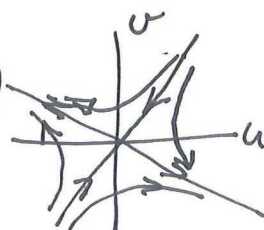
$\lambda = 1 - \sqrt{5}$: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$



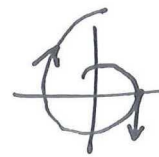
Rond $(-1, 1)$ eigenvectoren?

$\lambda = -1 + \sqrt{5}$: $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 - \sqrt{5}$: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

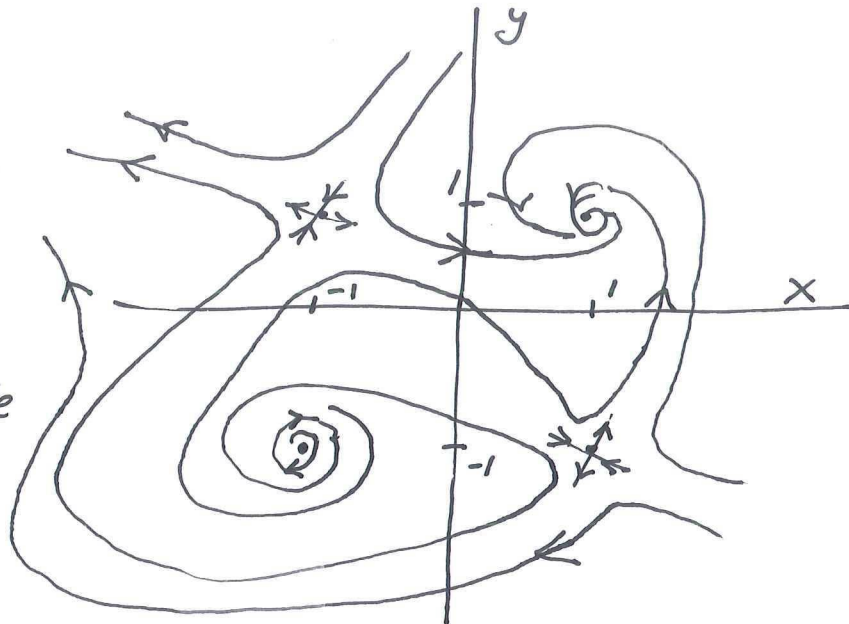


Rond $(-1, -1)$ richting?

Als $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  rechtsom

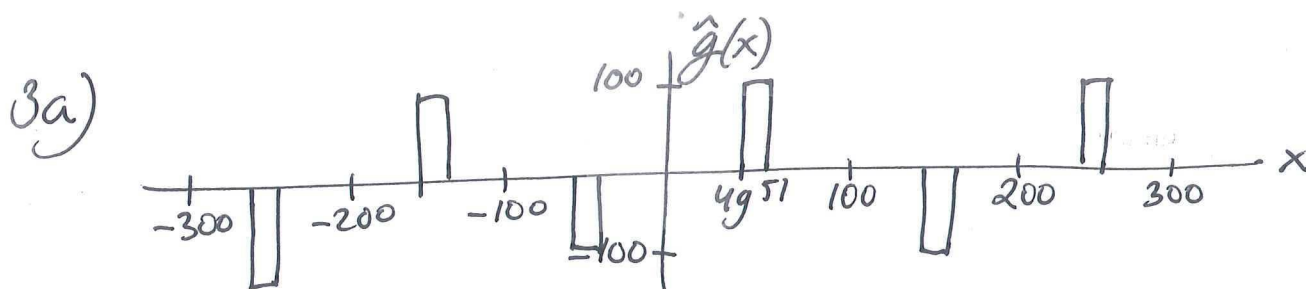
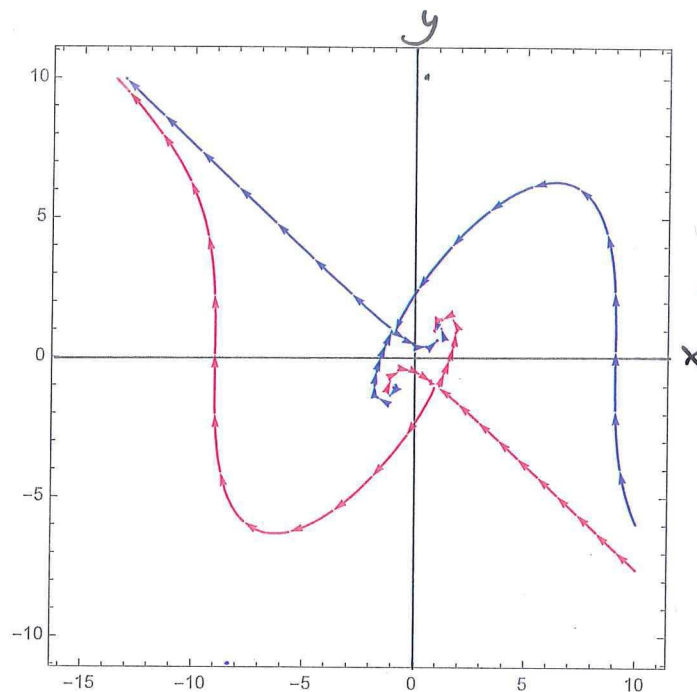
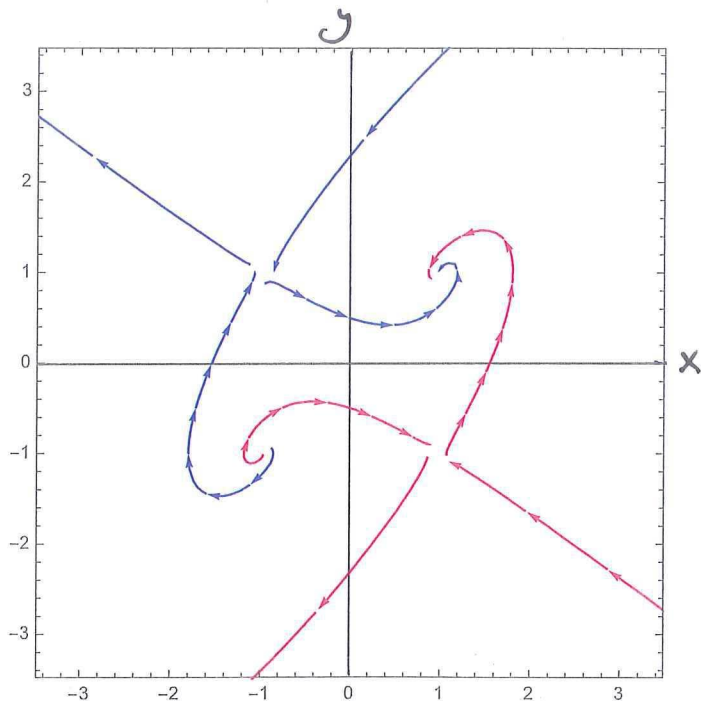
2d) vervolg

e) Na lange tijd
gaat (x,y)
of naar $(1,1)$
of naar de grote
y en
 $x \rightarrow -\infty$



Nog 2x geplot:

uitgezoomd



b) $\hat{g}$ is oneven, dus een sinusreeks

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \quad \text{met } L=100$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2}{100} \int_0^{51} 49 \sin \frac{k\pi x}{100} dx$$

$$= \frac{2 \cdot 100}{k\pi} \left[-\cos \frac{k\pi x}{100} \right]_0^{51} = \frac{200}{k\pi} \left(\cos \frac{49k\pi}{100} - \cos \frac{51k\pi}{100} \right)$$

4) 
 $x=0$ $x=100$
 $u(0,t)=0$ $u(100,t)=0$

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

beginvoor: $u(x,0)=0$
 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$

a) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightarrow a^2 X''T = XT''$
 $\rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\sigma \Rightarrow \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T'' + a^2 \sigma T = 0 \end{cases}$

b) randvoorwaarden $u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$
 $u(100,t) = X(100)T(t) = 0 \Rightarrow X(100) = 0$

$\sigma < 0$: $\sigma = -\mu^2$ ($\mu > 0$) $X'' - \mu^2 X = 0$

$$X(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x$$

$X(0) = c_1 = 0$ en $X(100) = c_2 \sinh(100\mu) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
 alleen $X(x) = 0$

$\sigma = 0$: $X'' = 0 \rightarrow X' = A \rightarrow X(x) = Ax + B$

$X(0) = B = 0$ en $X(100) = 100A = 0 \Rightarrow A = 0$

alleen $X(x) = 0$

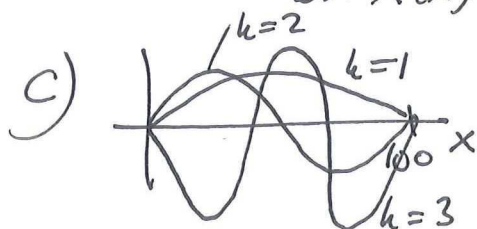
$\sigma > 0$, $\sigma = \mu^2$ ($\mu > 0$) $X'' + \mu^2 X = 0$

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

$X(0) = c_1 = 0$ en $X(100) = c_2 \sin(100\mu) = 0$

$100\mu = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{100}$ en $\sigma = \frac{k^2\pi^2}{(100)^2}$

en $X(x) = c_2 \sin \frac{k\pi x}{100}$



d) $T'' + \frac{k^2\pi^2 a^2}{(100)^2} T = 0 \Rightarrow T(t) = c_1 \cosh \frac{k\pi a t}{100} + c_2 \sinh \frac{k\pi a t}{100}$

e) $u(x,0) = X(x)T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0$ dus omdat $T(0) = c_1$,
 geldt $T(t) = c_2 \sinh \frac{k\pi a t}{100}$

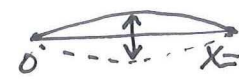
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{100} \sinh \frac{k\pi a t}{100}$$

4 f) snelheid: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{k\pi a}{100} \sin \frac{k\pi x}{100} \cos \frac{k\pi a t}{100}$

beginnsnelheid: $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{k\pi a}{100} \sin \frac{k\pi x}{100} = g(x)$
 b_k uit opgave 3b

$$C_k = \frac{100}{k\pi a} b_k$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20000}{k^2 \pi^2 a} \left(\cos \frac{49k\pi}{100} - \cos \frac{51k\pi}{100} \right) \sin \frac{k\pi x}{100} \sin \frac{k\pi a t}{100}$$

g) grondtoon: $k=1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi a t}{100}\right)$ 

De periode hiervan $\frac{\pi a P}{100} = 2\pi$ dus $P = \frac{200}{a}$ s.

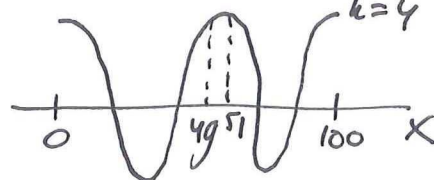
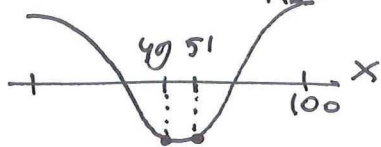
261,6 Hz heeft als periode $P = \frac{1}{261,6}$ s.

Dus $\frac{1}{261,6} = \frac{200}{a}$ en $a = 200 \cdot 261,6 = 52320$ cm/s

h) Alleen modes met oneven k worden aangeslagen.

Dit is te zien aan de b_k of C_k :

$$\cos \frac{49k\pi}{100} - \cos \frac{51k\pi}{100} = 0 \text{ als } k=2,4,6,8,\dots$$



Of uitgerekend:

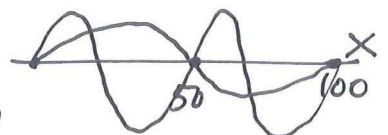
$$\begin{aligned} \cos \frac{49k\pi}{100} - \cos \frac{51k\pi}{100} &= \cos\left(\frac{50k\pi}{100} - \frac{k\pi}{100}\right) - \cos\left(\frac{50k\pi}{100} + \frac{k\pi}{100}\right) \\ &= \cancel{\cos \frac{50k\pi}{100} \cos \frac{k\pi}{100}} + \sin \frac{50k\pi}{100} \sin \frac{k\pi}{100} \\ &\quad - \left(\cancel{\cos \frac{50k\pi}{100} \cos \frac{k\pi}{100}} - \sin \frac{50k\pi}{100} \sin \frac{k\pi}{100} \right) \\ &= 2 \sin \frac{50k\pi}{100} \sin \frac{k\pi}{100} \text{ en } \sin \frac{50k\pi}{100} = 0 \text{ als } k \text{ even is.} \end{aligned}$$

Het is ook symmetrisch te zien:

$$\sin \frac{k\pi x}{100} \text{ voor } k=2,4,6,\dots$$

hebben een knoop in $x=50$

Als je op een knoop staat, gaat die mode niet trillen.



Tentamen Differentiaalvergelijkingen, WI2253CT
maandag 28 januari 2013, 14.00-17.00 uur
Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

Laat duidelijk blijken hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

De normering is in de linker kantlijn aangegeven. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5, en afgerond.

1. In een afgesloten gebied leeft een kolonie wilde zwijnen.
Het aantal tientallen zwijnen in jaar t is $y(t)$ met

$$\frac{d}{dt}y(t) = 6y - y^2 - h,$$

waarin h het aantal tientallen zwijnen is dat per jaar wordt weggevangen.
Let op: U hoeft deze differentiaalvergelijking niet op te lossen.

- 3p a) Neem $h = 5$. Bereken de evenwichtoplossingen, d.w.z. de waarden voor $y(t)$ waarvoor de populatiegrootte constant blijft.
Bepaal met behulp van y' en een faselijn hoe groot de beginpopulatie moet zijn als de populatie niet uit mag sterven.
- 2p b) Neem nu niet $h = 5$, maar $y(0) = 10$. Bepaal het maximale aantal zwijnen dat gevangen mag worden (dus de maximale h) zonder dat de populatie uitsterft.

2. Voor functies $x(t)$ en $y(t)$ is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (x^2 - 1)(y - 2) = x^2y - 2x^2 - y + 2 \\ \frac{dy}{dt} &= -(x + 2)(y - 1) = -xy + x - 2y + 2\end{aligned}$$

- 1p a) Bepaal de drie evenwichtspunten van dit stelsel.
- 4p b) Bepaal het type van elk van de evenwichtspunten.
- 4p c) Maak een schets van de oplossingskrommen in het fasevlak.
- 2p d) Beschrijf in woorden het gedrag van $x(t)$. Hangt dat af van de beginwaarden?

3. Zijn de volgende reeksen convergent of divergent? Toon dat aan.

- 2p a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$
- 3p b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - 1}$

4. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

- 2p a) Geef het vijfde-graads Taylorpolynoom $T_5(x)$ van f rond $a = 0$.
(Gebruik het formuleblad, en let goed op het aantal termen.)
- 2p b) Schat de maximale grootte van de restterm $R_5(x)$ als $0 \leq x \leq 1$.
Differentieer hierbij niet, maar gebruik dat $-15 \leq f^{(6)}(x) \leq 10$ als $0 \leq x \leq 1$.
- 1p c) Bereken $\int_0^1 T_5(x) dx$.
- 1p d) Schat (m.b.v. 4b) de maximale grootte van de fout dit u maakt bij het benaderen van $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ door $\int_0^1 T_5(x) dx$.

5. Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{voor } 0 < x < \pi \\ 20, & \text{voor } \pi < x < 3\pi \\ 0, & \text{voor } 3\pi < x < 4\pi \end{cases}$

- 1p a) Breid $f(x)$ uit tot een oneven functie met periode 8π .
Schets de grafiek van deze uitbreiding op het interval $-8\pi < x < 8\pi$.
- 4p b) Bepaal de Fourrierreeks van (de uitgebreide) $f(x)$.

6. In een metalen staafje van 4π cm lang geldt voor de temperatuurverdeling $u(x, t)$ (in graden Celcius):

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Als randvoorwaarden gelden:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{en} \quad u(4\pi, t) = 0 \quad \text{voor} \quad t > 0.$$

Het staafje heeft op $t = 0$ als temperatuurverdeling:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{voor} \quad 0 < x < 4\pi,$$

waarbij $f(x)$ de functie uit opgave 5 is.

- 1p a) Laat zien dat de partiële differentiaalvergelijking gescheiden kan worden m.b.v. $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- 4p b) Bepaal alle niet-triviale oplossingen $X(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden.
- 1p c) Bepaal bij elk van de in (b) gevonden oplossingen $X(x)$ de bijbehorende $T(t)$.
- 2p d) Bepaal de algemene oplossing $u(x, t)$ die voldoet aan de randvoorwaarden.
- 2p e) Bepaal de oplossing die ook voldoet aan de beginvoorwaarde.
- 3p f) Als $v(x, t)$ de temperatuurverdeling in hetzelfde staafje is, maar nu gerekend in graden Kelvin, dan is $v(x, t) = u(x, t) + 273$.
Wat zijn voor $v(x, t)$: (I) de partiële differentiaalvergelijking, (II) de randvoorwaarden, (III) de beginvoorwaarde en (IV) de oplossing?
Als je v wilt weten, waarom kan je procedure 6a t/m 6e dan niet direkt voor v uitvoeren, en moet je eerst u uitrekenen?

Uitwerkingen tentamen Wi2253CT 28 januari 2013

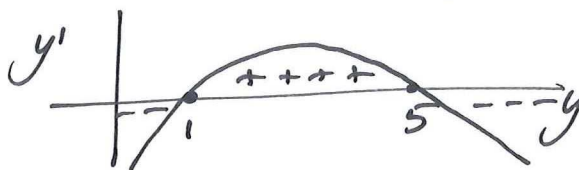
1 a) $\frac{dy}{dt} = 6y - y^2 - 5$ evenwichtpunten: $y' = 0$

$$6y - y^2 - 5 = 0$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(y-5)(y-1) = 0$$

$$y = 1 \text{ of } y = 5$$



fase lijn:

$y = 1$ instabiel evenwichtspunt
 $y = 5$ stabiel evenwichtspunt

De populatie sterft niet uit als $y(0) \geq 1$.

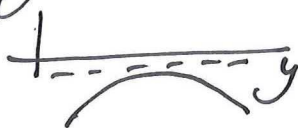
(Omdat $y = 1$ een instabiel punt is, liever voor de zekerheid $y(0) > 1$)

b) $\frac{dy}{dt} = 6y - y^2 - h$, $y(0) = 10$

evenwichtpunten: $y^2 - 6y + h = 0$; $y^2 - 6y + g = g - h$;

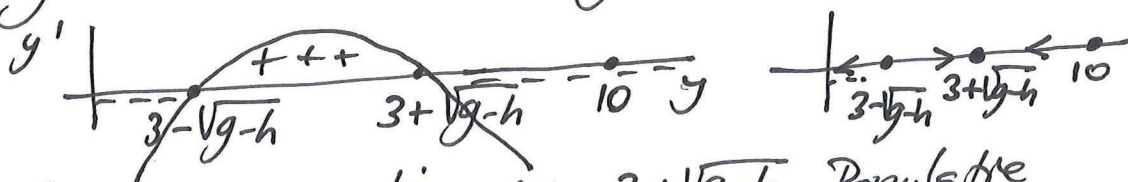
$$(y-3)^2 = g-h$$

Als $h \geq g$: geen evenwichtpunten



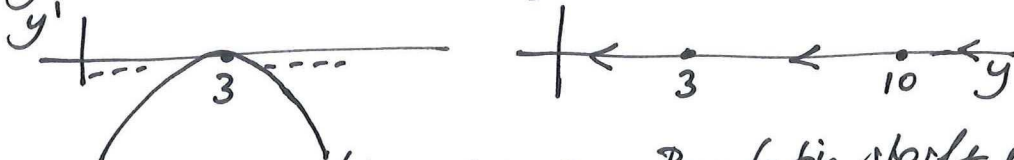
fase lijn:
 populatie sterft uit.

Als $h < g$: evenwichtspunten $y = 3 \pm \sqrt{g-h}$



Als $y(0) = 10$ is $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3 + \sqrt{g-h}$. Populatie sterft niet uit.

Als $h = g$: evenwichtspunt $y = 3$



Als $y(0) = 10$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3$ Populatie sterft niet uit. Dus $h \leq g$.

(Maar $y = 3$ is een instabiel punt, dus voor de zekerheid heb je liever $h < g$.)

2a) Evenwichtspunten: $x' = 0$ én $y' = 0$

$$(x^2 - 1)(y - 2) = 0 \quad \text{én} \quad -(x + 2)(y - 1) = 0$$

$$(x = 1 \text{ of } x = -1 \text{ of } y = 2) \quad \text{én} \quad (x = -2 \text{ of } y = 1)$$

Combinaties: $(x = 1 \text{ én } y = 1)$ of $(x = -1 \text{ én } y = 1)$ of $(y = 2 \text{ én } x = -2)$

Evenwichtspunten: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$

$$b) \quad \frac{dx}{dt} = x^2 y - 2x^2 - y + 2 \quad J = \begin{pmatrix} 2xy - 4x & x^2 - 1 \\ -y + 1 & -x - 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dt} = -xy + x - 2y + 2$$

Bij $(1, 1)$: $\underline{u} = \underline{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \underline{u}$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ dus een stabiele knoop.

Bij $(-1, 1)$: $\underline{u} = \underline{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{u}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, dus een (instabiel) sadelpunt.

Bij $(-2, 2)$: $\underline{u} = \underline{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{u}' \cong \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{3} i \quad \text{cirkelpunt}$$

c) Bij $(1, 1)$:

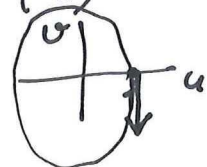
Bij $(-1, 1)$: $\underline{u}$ bij $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{u}$ bij $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bij $(-2, 2)$: richting? Als $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

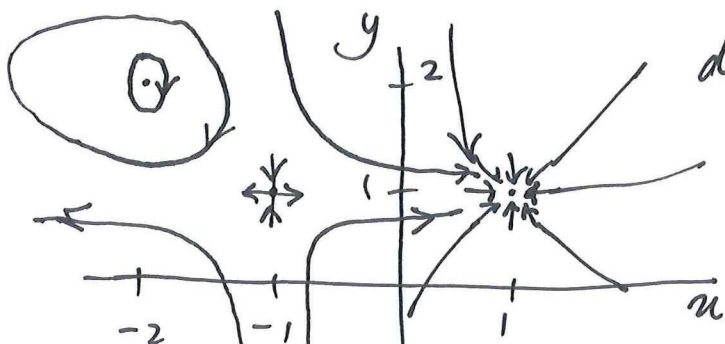
$$\underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dus rechtson.



d) Als (x, y) in de buurt van $(-2, 2)$ begint zal $x(t)$ (en $y(t)$) gaan oscilleren.

Als $x(0)$ wat groter is ($x(0) > -1$) dan convergeert $x(t)$ monotoon naar $x = 1$.



Er valt nog meer te zeggen, maar niet zonder computer.

$$3a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Dit zijn twee meetkundige reeksen, met redens $\frac{1}{2}$ resp. $\left(\frac{3}{4}\right)$. Voor beide geldt dat $|r| < 1$, dus convergent.

(De som is zelfs te bepalen als $\frac{1/2}{1-1/2} + \frac{3/4}{1-3/4} = 1 + 3 = 4$)

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1/n} = 0, \text{ divergentietest} \right)$$

$$\frac{n}{2n^2-1} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ is divergent, want een p-reeks met $p=1$ (harmonische reeks)

$\sum \frac{n}{2n^2-1}$ heeft in $\sum \frac{1}{2n}$ een divergente minorant en is dus zelf ook divergent.

$$4) f(x) = e^{-x^2/2}$$

$$a) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{nu } -\frac{x^2}{2} \text{ i.p.v. } x$$

voor $T_5(x)$ zijn drie termen genoeg.

$$T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$b) R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)(x-0)^6}{6!} \quad \text{met } c \text{ tussen } x \text{ en } 0 \text{ in.}$$

met $0 \leq x \leq 1$, dus $0 \leq c \leq 1$

$$|R_5(x)| = \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} |x|^6 \leq \frac{15 \cdot 1^6}{6!} = \frac{1}{48}$$

$$c) \int_0^1 T_5(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}\right]_0^1 = \frac{103}{120} = 0.8583$$

$$d) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (T_5(x) + R_5(x)) dx = \int_0^1 T_5(x) dx + \int_0^1 R_5(x) dx$$

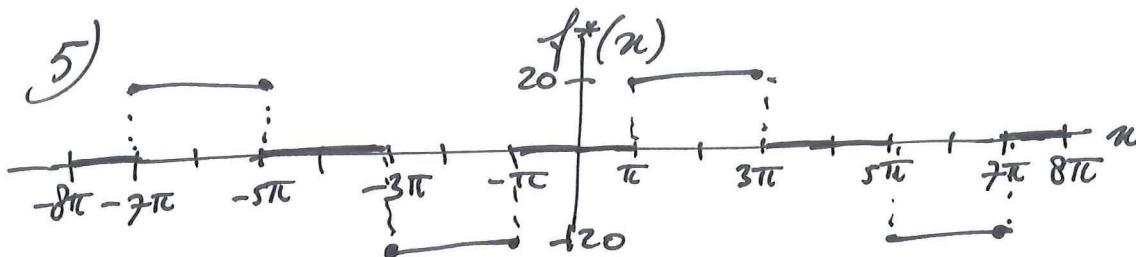
exacte integraal benadering fout

$$\left| \int_0^1 R_5(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_5(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{48} dx = \frac{1}{48} = 0.0208$$

of (veel) preciezer:

$$\int_0^1 |R_5(x)| dx = \int_0^1 \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} |x|^6 dx \leq \int_0^1 \frac{15}{6!} x^6 dx = \frac{15}{6! \cdot 7} = \frac{1}{7 \cdot 48} = 0.0030$$

(De echte fout is $0.8556 - 0.8583 = -0.0027$)



b) De Fourierreeks is een sinusreeks, want oneven

$$f^*(u) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi u}{L} \quad \text{met } L = 4\pi$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{mu}{4}$$

b_m bepalen door te vermenigvuldigen met $\sin \frac{k\pi u}{4}$ en te integreren over $-L$ tot L

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} \underbrace{\sin \frac{k\pi u}{4}}_{\text{oneven}} \underbrace{f^*(u)}_{\text{oneven}} du = b_k \cdot L$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^{4\pi} \sin \frac{k\pi u}{4} f(u) du = \frac{2}{4\pi} \int_0^{4\pi} \sin \frac{k\pi u}{4} \cdot 20 du$$

$$= \frac{2 \cdot 20}{4\pi} \frac{4}{k} \left[-\cos \frac{k\pi u}{4} \right]_0^{4\pi} = \frac{40}{k\pi} \left[-\cos \frac{3k\pi}{4} + \cos \frac{k\pi}{4} \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is} \\ \frac{40\sqrt{2}}{k\pi} & \text{als } k = 1, 7, \dots \\ -\frac{40\sqrt{2}}{k\pi} & \text{als } k = 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$\text{dus } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi}{4} - \cos \frac{3k\pi}{4} \right) \sin \frac{k\pi}{4}$$

6



$$x=0 \\ u(0,t)=0$$

$$x=4\pi \\ u(4\pi,t)=0$$

$$2u_{xx} = u_t$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$a) u(x,t) = X(x)T(t) \rightarrow 2X''T = XT'$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T} = -\sigma$$

$$\text{dus } \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + 2T\sigma = 0 \end{cases}$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(4\pi,t) = X(4\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(4\pi) = 0$$

$$b) X'' + \sigma X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(4\pi) = 0$$

$$\sigma < 0; \sigma = -\mu^2; X'' - \mu^2 X = 0$$

$$X(x) = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x)$$

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(4\pi) = C_1 \sinh(4\pi\mu) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$\Rightarrow X(x) = 0$ triviale oplossing.

$$\sigma = 0; X'' = 0 \rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X(0) = B = 0 \text{ en } X(4\pi) = 4\pi A + B = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \text{ ook triviale}$$

$$\sigma > 0; \sigma = \mu^2; X'' + \mu^2 X = 0$$

$$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$$

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(4\pi) = C_2 \sin 4\pi\mu = 0$$

$$\Rightarrow \text{niet-triviale oplossing als } 4\pi\mu = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k}{4}$$

$$\text{dus als } \sigma = \frac{k^2}{16} \text{ dan is } X(x) = C_2 \sin \frac{kx}{4} \quad k=1, 2, \dots$$

(voor andere σ weer triviale)

$$c) \sigma^2 = \frac{k^2}{16}, \quad T' + \frac{2k^2}{16} T = 0 \Rightarrow T(t) = C_3 e^{-\frac{k^2}{8}t}$$

$$d) u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{kx}{4} e^{-\frac{k^2}{8}t}$$

$$e) u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{kx}{4} \cdot 1 = f(x)$$

dus $C_k = b_k$ uit opgave 5

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi}{4} - \cos \frac{3k\pi}{4} \right) \sin \frac{kx}{4} e^{-\frac{k^2}{8}t}$$

$$f) v(x, t) = u(x, t) + 273 \quad \text{dus } u = v - 273$$

$$\text{I) } u_{xx} = v_{xx} \text{ en } u_t = v_t \text{ dus } 2u_{xx} = u_t \text{ wordt } 2v_{xx} = v_t$$

$$\text{II) } v(0, t) = u(0, t) + 273 = 0 + 273$$

$$v(4\pi, t) = u(4\pi, t) + 273 = 0 + 273$$

$$\text{III) } v(x, 0) = u(x, 0) + 273 = f(x) + 273 = \begin{cases} 273, & 0 < x < \pi \\ 293, & \pi < x < 3\pi \\ 273, & 3\pi < x < 4\pi \end{cases}$$

$$\text{IV) } v(x, t) = u(x, t) + 273$$

$\nearrow$ zie 6e)

Je kunt v niet met de procedure van 6a-6e uitrekenen, want in stap 6b heb je homogene randvoorwaarden nodig: $X(0) = 0$ en $X(4\pi) = 0$.

en uit $v(0, t) = 273$ valt al niet te concluderen wat $X(x)$ is als $V(x, t) = X(x)T(t)$.